LINKÖPINGS UNIVERSITET
Matematiska institutionen
Fredrik Andersson

2015-08-21

Svar m m till tentamen i TATA76 Flervariabelanalys 2015-08-21

1) Kurvorna skär varandra i punkterna $(-1/4, 1/2)$ och $(-1, 2)$. En omsorgsfullt ritad figur ger sedan (I = sökt integral)

$$I = \int_{1/2}^{2} \left(\int_{y^2-3y+1}^{-y/2} y\,dx \right) dy = \int_{1/2}^{2} \left(\frac{5y^2}{2} - y - y^3 \right) dy = \frac{2}{3} - \frac{5}{48} + \frac{1}{8} + \frac{1}{64} = \frac{9}{16} + \frac{9}{64} = \frac{45}{64}.$$

2) Uttrycket $\dfrac{xy - xz + yz}{x^2 + y^2 + z^2}$ är $= 0$ på koordinataxlarna men $= 1/2 \neq 0$ på linjen $x = y$, $z = 0$. Det andra gränsvärdet existerar alltså inte. Byte till polära koordinater i det första uttrycket ger

$$0 \leq \left| \frac{x^3 - 2y^3}{x^2 + y^2} \right| = \left| \frac{\rho^3 \cos^3 \varphi - 2\rho^3 \sin^3 \varphi}{\rho^2} \right| = \rho |\cos^3 \varphi - 2 \sin^3 \varphi| \leq \rho |\cos^3 \varphi| + 2\rho |\sin^3 \varphi| \leq 3\rho \to 0\,,\ \rho \to 0,$$

enligt triangelolikheten. Eftersom ytterleden i denna olikhet inte beror på φ följer det av instängningsregeln att $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3 - 2y^3}{x^2 + y^2} = 0.$

3) Ekvationen kan skrivas $z'_x - \dfrac{2}{x} z = y$ och vi ser att t ex $\dfrac{1}{x^2}$ är en integrerande faktor. Förlängning med denna ger

$$\left(\frac{1}{x^2} z \right)'_x = \frac{1}{x^2} z'_x - \frac{2}{x^3} z = \frac{y}{x^2} \Leftrightarrow \frac{z}{x^2} = -\frac{y}{x} + f(y) \Leftrightarrow z = x^2 f(y) - xy$$

där f är en godtycklig $\mathcal{C}^1$-funktion av en variabel.

På enhetscirkeln är $(x, y) = (\cos\varphi, \sin\varphi)$ och eftersom $x > 0$ är $\cos\varphi = \sqrt{1 - \sin^2 \varphi}$. Detta ger

$$\cos^2 \varphi f(\sin\varphi) - \cos\varphi \sin\varphi = 0 \Leftrightarrow f(\sin\varphi) = \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi} = \frac{\sin\varphi}{\sqrt{1 - \sin^2 \varphi}} \Leftrightarrow f(y) = \frac{y}{\sqrt{1 - y^2}}.$$

Enda lösningen som uppfyller det givna villkoret är alltså $z = \dfrac{x^2 y}{\sqrt{1 - y^2}} - xy = xy \left(\dfrac{x}{\sqrt{1 - y^2}} - 1 \right).$

4) Använd stavar i z-led. Efter första integrationen fås $E : x^2 + y^2 \leq 4x - 4y - 3 \Leftrightarrow (x-2)^2 + (y+2)^2 \leq 5.$ Gör sedan variabelbytet $x = 2 + \rho\cos\varphi$, $y = -2 + \rho\sin\varphi$ (Rita!) så fås (V = sökt volym)

$$V = \iint_E \left(\int_{x^2+y^2}^{4x-4y-3} dz \right) dxdy = \iint_E \left(5 - (x-2)^2 - (y+2)^2 \right) dxdy = \int_0^{\sqrt{5}} \left(\int_0^{2\pi} (5 - \rho^2)\rho\, d\varphi \right) d\rho = \frac{25\pi}{2}.$$

5a) Se kursboken.

5b) Insättning av kurvparametriseringen i ekvationen för S ger $t^2 + t + \dfrac{t^2 + t}{t^2} - t^2 = 3 \Leftrightarrow t - 2 + \dfrac{1}{t} = 0 \Leftrightarrow \dfrac{(t-1)^2}{t} = 0 \Leftrightarrow t = 1$. $(1, 2, 1)$ är alltså den enda skärningspunkten mellan Γ och S. Kurvtangenten i denna punkt blir $(x'(1), y'(1), z'(1)) = (3, 3, 1)$ så $\bar{v} = \dfrac{1}{\sqrt{19}}(3, 3, 1)$ är en enhetsvektor som är lika riktad med kurvtangenten. Sökta riktningsderivatan blir alltså, enligt känd sats $f'_{\bar{v}}(1, 2, 1) = \nabla f(1, 2, 1) \cdot \bar{v} = (-1, 2, -3) \cdot \dfrac{1}{\sqrt{19}}(3, 3, 1) = 0.$

6) Kedjeregeln ger

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}=y\frac{\partial z}{\partial u}\,,\ \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}=x\frac{\partial z}{\partial u}+\frac{\partial z}{\partial v}.$$

Kedjeregeln och produktregeln tillsammans ger sedan

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(y\frac{\partial z}{\partial u}\right)=\frac{\partial z}{\partial u}+y\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)=\frac{\partial z}{\partial u}+y\left(\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}\right)=\frac{\partial z}{\partial u}+xy\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}+y\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}$$

eftersom $z\in\mathcal{C}^2$. På samma sätt fås

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=y^2\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}\,,\ \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=x^2\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}+2x\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}+\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}.$$

Insättning vänsterledet ger $x^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-2xy\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+y^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}+2x\frac{\partial z}{\partial x}=y^2\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}$ så vi får ekvationen

$$y^2\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}=y^2\ln x\Leftrightarrow\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}=\ln x=\ln\frac{u}{v}\Leftrightarrow\frac{\partial z}{\partial v}=v\ln\frac{u}{v}+v+f(u)\Leftrightarrow z=\frac{v^2}{2}\ln\frac{u}{v}+\frac{3v^2}{4}+vf(u)+g(u).$$

Återgång till de ursprungliga variablerna ger den allmänna lösningen $z=\frac{y^2}{2}\ln x+\frac{3y^2}{4}+yf(xy)+g(xy)$ där $f,g\in\mathcal{C}^2$ är godtyckliga envariabelfunktioner.

Derivering ger $z'_x=\frac{y^2}{2x}+y^2f'(xy)+yg'(xy)$ så villkoret $z'_x(1,y)=0$ ger $g'(y)=-\frac{y}{2}-yf'(y)$. En partialintegration ger

$$g(y)=-\int\left(\frac{y}{2}+yf'(y)\right)dy=-\frac{y^2}{4}-yf(y)+\int f(y)dy=\Big/h(y)=\int f(y)dy\Big/=-\frac{y^2}{4}-yh'(y)+h(y).$$

De sökta lösningarna blir alltså $z=\frac{y^2}{4}\left(2\ln x+3-x^2\right)+y(1-x)h'(xy)+h(xy)$ där $h\in\mathcal{C}^2$ är en godtycklig envariabelfunktion.

7) Inför nya koordinater (x',y',z') genom att vrida det ursprungliga koordinatsystemet så att ellipsoiden blir rotationssymmetrisk kring z'-axeln. Då är $dx'dy'dz'=dxdydz$ eftersom funktionaldeterminanten för en vridning är 1 och $x'^2+y'^2+z'^2=x^2+y^2+z^2$ eftersom vridningar bevarar vektorers längder, allt enligt kursen i linjär algebra. I dessa koordinater får ellipsoiden ekvationen $\frac{x'^2}{a^2}+\frac{y'^2}{a^2}+\frac{z'^2}{c^2}\leq 1$ där $a,c>0$ är konstanter, och dess volym är $V=\frac{4\pi a^2c}{3}$ (visas i en övningsuppgift, kan också integreras fram). Sätt nu $u=\frac{x'}{a}$, $v=\frac{y'}{a}$ och $w=\frac{z'}{c}$ (så att ellipsoiden övergår till enhetsklotet K) och inför sedan sfäriska koordinater i (u,v,w)-rummet så fås ($I=$ sökt integral)

$$\begin{aligned}I&=\iiint_{D'}(x'^2+y'^2+z'^2)\,dx'dy'dz'=a^2c\iiint_K\left(a^2(u^2+v^2)+c^2w^2\right)dudvdw\\&=a^2c\int_0^\pi\left(\int_0^1\left(\int_0^{2\pi}\left(a^2r^2\sin^2\theta+c^2r^2\cos^2\theta\right)r^2\sin\theta\,d\varphi\right)dr\right)d\theta\\&=\frac{2\pi a^2c}{5}\int_0^\pi\left(a^2\sin\theta+(c^2-a^2)\cos^2\theta\sin\theta\right)d\theta=\frac{4\pi a^2c}{15}\left((2a^2+c^2\right)=\frac{V}{5}\left(2a^2+\frac{9V^2}{16\pi^2a^4}\right)=:\frac{V}{5}f(a).\end{aligned}$$

Då är $f'(a)=4a-\frac{9V^2}{4\pi^2a^5}$ d v s $f'(a)=0$ om $a=\left(\frac{3V}{4\pi}\right)^{1/3}$, $f'(a)>0$ om $a>\left(\frac{3V}{4\pi}\right)^{1/3}$ och $f'(a)<0$ om $0<a<\left(\frac{3V}{4\pi}\right)^{1/3}$ vilket visar att $f(a)$ är som minst då $a=\left(\frac{3V}{4\pi}\right)^{1/3}$. Detta ger olikheten

$$I\geq\frac{V}{5}f\left(\left(\frac{3V}{4\pi}\right)^{1/3}\right)=\frac{3}{5}\left(\frac{3}{4\pi}\right)^{2/3}V^{5/3}.$$

så $k=\frac{3}{5}\left(\frac{3}{4\pi}\right)^{2/3}$ duger.