LINKÖPINGS UNIVERSITET
Matematiska institutionen
Fredrik Andersson

Kurskod: TATA76
Provkod: TEN1

Tentamen i TATA76 Flervariabelanalys

2015-08-21 kl 14–19

Varje uppgift bedöms med 0–3 poäng. För betyget n räcker n godkända uppgifter, d v s uppgifter bedömda med minst 2 poäng, samt totalt $3n-1$ poäng där $n = 3, 4, 5$.

Inga hjälpmedel. Ej räknedosa. För full poäng krävs att lösningarna är fullständiga, väl motiverade, ordentligt skrivna och avslutade med ett svar som är förenklat så långt det är möjligt.

Lycka till!

1) Beräkna $\displaystyle\iint_D y\,dxdy$ om D är begränsad och ligger mellan $2x+y=0$ och $y^2 = x+3y-1$.

2) Undersök gränsvärdena $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3-2y^3}{x^2+y^2}$ och $\displaystyle\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{xy-xz+yz}{x^2+y^2+z^2}$.

3) Lös den partiella differentialekvationen $xz'_x - 2z = xy$ för $x > 0$ där $z = z(x,y) \in \mathcal{C}^1$.
Vilka lösningar uppfyller $z(x,y) = 0$ för alla punkter (x,y) på enhetscirkeln?

4) Beräkna volymen av mängden D given av olikheterna $x^2+y^2 \leq z$ och $4x-4y-z \geq 3$.

5a) Låt $f(x,y)$ vara en funktion av klass $\mathcal{C}^1$ och låt Γ vara nivåkurvan $f(x,y)=0$. Antag vidare att $\nabla f(x,y) \neq \bar{0}$ på Γ och att $\begin{cases} x &= x(t) \\ y &= y(t) \end{cases}$, $t : a \to b$ är en parametrisering av klass $\mathcal{C}^1$ av Γ. Visa att $\nabla f(x,y)$ är vinkelrät mot tangentvektorn till Γ i alla punkter på Γ.

5b) Låt $\Gamma : \begin{cases} x &= t^3 \\ y &= t^2+t \\ z &= t \end{cases}$, $t : -\infty \to \infty$ och $S : f(x,y,z) = y\left(1+\dfrac{1}{z^2}\right) - \dfrac{x}{z} = 3$.
Visa att Γ skär S i exakt en punkt. Beräkna också riktningsderivatan av f med avseende på kurvtangentens riktning, i denna punkt.

6) Lös den partiella differentialekvationen $x^2\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} - 2xy\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + y^2\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} + 2x\dfrac{\partial z}{\partial x} = y^2 \ln x$ för $x, y > 0$ där $z = z(x,y) \in \mathcal{C}^2$, t ex genom att byta till variablerna $u = xy$, $v = y$.
Finn också speciellt den/de lösningar som uppfyller $z'_x(1,y) = 0$.

7) Låt D vara en godtycklig rotationsellipsoid (d v s en ellipsoid som är rotationssymmetrisk kring någon av sina axlar) med centrum i origo och volym V. Bestäm en konstant $k > 0$ sådan att

$$\iiint_D (x^2+y^2+z^2)\,dxdydz \geq k \cdot V^{5/3}.$$