LINKÖPINGS UNIVERSITET
Matematiska institutionen
Fredrik Andersson

2015-06-08

Svar m m till tentamen i TATA76 Flervariabelanalys 2015-06-08

1) Sätt $u = 2x$, $v = y$ så att $dxdy = \frac{1}{2}dudv$ och D övergår till $E = \{(u,v); 4 \le u^2 + v^2 \le 8\,,\ u \ge 0\}$. Byte till polära koordinater i uv-planet ger sedan (I = sökt integral)

$$I = \frac{1}{2}\iint_E \frac{dudv}{u^2+v^2} = \frac{1}{2}\int_2^{2\sqrt{2}}\left(\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\frac{1}{\rho^2}\cdot\rho\,d\varphi\right)d\rho = \frac{\pi}{2}\int_2^{2\sqrt{2}}\frac{d\rho}{\rho} = \frac{\pi\ln 2}{4}.$$

2) Sätt $f(x,y,z) = 2xz + y^2 - z$ så att $f(x,y,z) = 3$ på S och låt sökta planet tangera S i (a,b,c) så att $2ac+b^2-c = 3$. Då är $\nabla f(a,b,c) = (2c, 2b, 2a-1)$ normal till sökta planet och därför (Rita!) vinkelrät mot vektorerna $(2-a, -b, -c)$ och $(-1-a, 1-b, -2-c)$ vilket ger ekvationerna $-4ac-2b^2+5c = 0$ och $-4ac-2b^2-4a+2b-c+2 = 0$. $2\cdot$första+andra ger $c = 2$ och andra−tredje ger sedan $4a-2b+10 = 0$ d v s $b = 2a+5$. Första ekvationen ger då $4a+(2a+5)^2-2 = 3 \Leftrightarrow 4a^2+24a+20 = 0 \Leftrightarrow a = -1$ eller $a = -5$.

De sökta tangentplanen blir alltså $4x + 6y - 3z = 8$ (tangerar i $(-1,3,2)$) och $4x - 10y - 11z = 8$ (tangerar i $(-5,-5,2)$).

3) Sätt $u = x + 2y$, $v = 3x + y$, så avbildas D, p g a linjärt byte, på en triangel i uv-planet med hörn i $(0,0)$, $(0,-5)$ och $(5,0)$. Vidare är $\dfrac{d(u,v)}{d(x,y)} = -5$ vilket ger $dxdy = \frac{1}{5}dudv$ och $x = \dfrac{2v-u}{5}$, $y = \dfrac{3u-v}{5}$. Detta ger (I = sökt integral)

$$I = \frac{1}{25}\int_0^5\left(\int_{u-5}^0 (3v-4u)\,dv\right)du = \frac{1}{25}\int_0^5\left(-\frac{3}{2}(u-5)^2 + 4u(u-5)\right)du$$
$$= \frac{1}{25}\left[-\frac{1}{2}(u-5)^3 + \frac{4}{3}u^3 - 10u^2\right]_0^5 = \frac{1}{25}\cdot 125\left(\frac{4}{3} - 2 - \frac{1}{2}\right) = -\frac{35}{6}.$$

4ab) Se kursboken.

4c) Då $|\bar{v}| = 1$ följer det av förutsättningarna (Rita!) att $\bar{v} = \frac{1}{2}\left(-\sqrt{3}, 1\right)$. Enligt sats är därför $f'_{\bar{v}}(1,2) = \nabla f(1,2)\cdot\bar{v} = (2,\pi)\cdot\frac{1}{2}\left(-\sqrt{3},1\right) = -\dfrac{2\sqrt{3}-\pi}{2}$.

5) Andra ekvationen får lösningarna $u = \dfrac{y^3}{3}\sin z + x^2\sin^2 y + f(x,z)$ där f är en godtycklig funktion av två variabler. Insättning i första ekvationen ger $2x\sin^2 y + f'_x(x,z) = 3x - x(5\cos 2y + 9\sin^2 y + \cos^2 y) = 3x - 5x\cos^2 y + 5x\sin^2 y - 9x\sin^2 y - x\cos^2 y = 2x\sin^2 y - 3x \Leftrightarrow f'_x(x,z) = -3x \Leftrightarrow f(x,z) = -\dfrac{3x^2}{2} + g(z)$ där g är en godtycklig envariabelfunktion. Insättning i tredje ekvationen ger nu $\dfrac{y^3}{3}\cos z + g'(z) = \dfrac{y^3}{3}\cos z - \sin z \Leftrightarrow g'(z) = -\sin z \Leftrightarrow g(z) = \cos z + C$ där C är en godtycklig konstant.

Alla lösningar ges alltså av $u = \dfrac{y^3}{3}\sin z + x^2\sin^2 y - \dfrac{3x^2}{2} + \cos z + C$.

6) I en omsorgsfullt ritad figur ser man (Rita!) att både D och K är symmetriska kring xy-planet. Om (x, y, z) är en punkt i övre halvan av D (där $z \geq 0$) gäller $x^2 + y^2 \geq kz^2 \Leftrightarrow r^2 \sin^2\theta \geq k \cdot r^2 \cos^2\theta \Leftrightarrow \arctan\sqrt{k} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ (sfäriska koordinater). Detta ger

$$\mu(D) = 2\int_0^R \left(\int_{\arctan\sqrt{k}}^{\pi/2} \left(\int_0^{2\pi} r^2 \sin\theta \, d\varphi \right) d\theta \right) dr = \frac{4\pi R^3}{3} \cos\left(\arctan\sqrt{k}\right) = \frac{4\pi R^3}{3\sqrt{1+k}}$$

där den sista likheten fås genom att använda Pythagoras sats på en rätvinklig triangel med kateter 1 och $\sqrt{k}$.

D:s volym blir alltså hälften av klotet K:s volym precis då $\sqrt{1+k} = 2 \Leftrightarrow k = 3$.

7) Kedjeregeln ger

$$\frac{\partial z}{\partial x} = yf'(x)\frac{\partial z}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial v}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = f(x)\frac{\partial z}{\partial u},$$

så insättning i den givna ekvationen ger

$$y\left(f'(x) - 3x^2 f(x)\right)\frac{\partial z}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial v} = x^2 z^2 \ln y.$$

Vi ser att denna ekvation förenklas kraftigt om vi väljer f så att $f'(x) - 3x^2 f(x) = 0$. Förlängning av denna ekvation med den integrerande faktorn e^{-x^3} ger att $\left(e^{-x^3} f(x)\right)' = e^{-x^3}\left(f'(x) - 3x^2 f(x)\right) = 0$ d v s $f(x) = Ce^{x^3}$ där C är en godtycklig konstant, och vi sätter $C = 1$ d v s $u = ye^{x^3}$.

Efter detta variabelbyte fås alltså ekvationen $\frac{\partial z}{\partial v} = x^2 z^2 \ln y = v^2 z^2 (\ln u - v^3)$. Division av båda leden med z^2 ger

$$\frac{\partial}{\partial v}\left(-\frac{1}{z}\right) = \frac{1}{z^2}\frac{\partial z}{\partial v} = v^2 \ln u - v^5 \Leftrightarrow \frac{1}{z} = \frac{v^6}{6} - \frac{v^3}{3}\ln u + \frac{1}{6}g(u) \Leftrightarrow z = \frac{6}{v^6 - 2v^3 \ln u + g(u)},$$

där g är en godtycklig envariabelfunktion av klass $\mathcal{C}^2$. Återgång till de ursprungliga variablerna ger nu den allmänna lösningen $z = \dfrac{6}{g\left(ye^{x^3}\right) - x^6 - 2x^3 \ln y}$.

Sökta partikulärlösningen fås ur villkoret

$$-3x^{-3} = \frac{6}{g\left(e^{1+x^3}\right) - x^6 - 2x^3} \Leftrightarrow g\left(e^{1+x^3}\right) - x^6 - 2x^3 = -2x^3 \Leftrightarrow g\left(e^{1+x^3}\right) = x^6,$$

genom att sätta $t = e^{1+x^3}$ vilket ger $x^3 = \ln t - 1$, d v s $g(t) = x^6 = (\ln t - 1)^2$.

Sökta partikulärlösningen blir alltså

$$z = \frac{6}{g\left(ye^{x^3}\right) - x^6 - 2x^3 \ln y} = \frac{6}{(\ln y + x^3 - 1)^2 - x^6 - 2x^3 \ln y} = \frac{6}{(\ln y - 1)^2 - 2x^3}$$