

Tentamen i TATA76 Flervariabelanalys

2015-06-08 kl 14–19

Varje uppgift bedöms med 0–3 poäng. För betyget n räcker n godkända uppgifter, d v s uppgifter bedömda med minst 2 poäng, samt totalt $3n - 1$ poäng där $n = 3, 4, 5$.

Inga hjälpmedel. Ej räknedosa. För full poäng krävs att lösningarna är fullständiga, väl motiverade, ordentligt skrivna och avslutade med ett svar som är förenklat så långt det är möjligt.

Lycka till!

- 1) Beräkna $\iint_D \frac{dx dy}{4x^2 + y^2}$ där D ges av olikheterna $4 \leq 4x^2 + y^2 \leq 8$, $x \geq 0$.
- 2) Finn alla tangentplan till ytan $S : 2xz + y^2 = z + 3$ som innehåller $(2, 0, 0)$ och $(-1, 1, -2)$.
- 3) Beräkna $\iint_D (x - y) dx dy$ där D är triangeln med hörn i $(0, 0)$, $(-2, 1)$ och $(-1, 3)$.
- 4a) Definiera riktningsderivatan $f'_{\bar{v}}(a, b)$ för en funktion f av två variabler, där $|\bar{v}| = 1$.
- 4b) Visa att $-|\nabla f(a, b)| \leq f'_{\bar{v}}(a, b) \leq |\nabla f(a, b)|$ om $f \in C^1$. För vilka \bar{v} gäller likhet?
- 4c) Beräkna $f'_{\bar{v}}(1, 2)$ om vinkeln mellan \bar{v} och positiva x -axeln är 150° , vinkeln mellan \bar{v} och positiva y -axeln är 60° och $f(x, y) = y^2 \arctan x$.
- 5) Bestäm alla u av klass C^2 som uppfyller
$$\begin{cases} u'_x &= 3x - x(5 \cos 2y + 9 \sin^2 y + \cos^2 y) \\ u'_y &= y^2 \sin z + 2x^2 \sin y \cos y \\ u'_z &= \frac{y^3}{3} \cos z - \sin z \end{cases}.$$
- 6) Låt $K = \{(x, y, z); x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2\}$ och $D = \{(x, y, z); x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2 \text{ och } x^2 + y^2 \geq kz^2\}$ där $R, k > 0$ är konstanter. Bestäm volymen av D samt alla värden på k sådana att volymen av D är exakt hälften av volymen av K .
- 7) Lös ekvationen $\frac{\partial z}{\partial x} - 3x^2 y \frac{\partial z}{\partial y} = x^2 z^2 \ln y$ för $x, y > 0$ om $z = z(x, y) \in C^1$.

Finn också speciellt den/de lösningar som uppfyller $z(x, e) = -3x^{-3}$.

Ledning: Gör ett variabelbyte av formen $u = yf(x)$, $v = x$.