LINKÖPINGS UNIVERSITET
Matematiska institutionen
Fredrik Andersson

2015-03-16

Svar m m till tentamen i TATA76 Flervariabelanalys 2015-03-16

1) Byte till sfäriska koordinater ger (I = sökt integral)

$$I = \int_0^2 \left(\int_0^{\pi} \left(\int_0^{2\pi} e^{r^3} \cdot r^2 \sin\theta \, d\varphi \right) d\theta \right) dr = 2\pi \int_0^2 r^2 e^{r^3} \left[-\cos\theta \right]_0^{\pi} dr = 4\pi \left[\frac{1}{3} e^{r^3} \right]_0^2 = \frac{4\pi(e^8-1)}{3}.$$

2a) Kedjeregeln ger $\dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{\partial z}{\partial u}\dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial z}{\partial v}\dfrac{\partial v}{\partial x} = ye^x \dfrac{\partial z}{\partial u}$. Kedjeregeln och produktregeln ger sedan

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial}{\partial y}\left(ye^x \frac{\partial z}{\partial u} \right) = e^x \frac{\partial z}{\partial u} + ye^x \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial u} \right) = e^x \frac{\partial z}{\partial u} + ye^x \left(\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v}\frac{\partial v}{\partial y} \right) \\ &= e^x \frac{\partial z}{\partial u} + ye^{2x}\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} + ye^x \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v}.\end{aligned}$$

2b) Som ovan fås $\dfrac{\partial z}{\partial y} = e^x \dfrac{\partial z}{\partial u} + \dfrac{\partial z}{\partial v}$, så att $z'_x = yz'_y \Leftrightarrow ye^x z'_u = ye^x z'_u + yz'_v \Leftrightarrow z'_v = 0 \Leftrightarrow z = f(u) = f(ye^x)$ där f är en godtycklig $\mathcal{C}^1$- funktion av en variabel.
Det givna villkoret ger $e^{2x} + e^{3x} = z(x,-1) = f(-e^x) \Leftrightarrow f(t) = t^2 - t^3$ så den sökta partikulärlösningen blir $z = y^2 e^{2x}(1 - ye^x)$.

3) Olikheten kan skrivas $\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2} x \right)^2 + \left(\dfrac{x}{2} + y \right)^2 \leq 4$, så sätt $u = \dfrac{\sqrt{3}}{2}x$, $v = \dfrac{x}{2} + y \Rightarrow \dfrac{d(u,v)}{d(x,y)} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.
Övergång till polära koordinater i uv-planet ger sedan (I = sökt integral)

$$I = \iint_{u^2+v^2 \leq 4, u \geq 0} \frac{2}{\sqrt{3}} u \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} du dv = \frac{4}{3} \int_0^2 \left(\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \rho\cos\varphi \cdot \rho d\varphi \right) d\rho = \frac{64}{9}.$$

4a) Se kursboken.

4b) På x-axeln är $f(x,0) = 1$ för $x \neq 0$ så om $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ existerar måste det vara 1. Betrakta

$$\begin{aligned} 0 \leq |f(x,y) - 1| &= \frac{|2x^2y - xy^2|}{x^2+y^2} = /\text{polära}/ = \frac{|2\rho^3 \cos^2\varphi \sin\varphi - \rho^3 \cos\varphi \sin^2\varphi|}{\rho^2} \\ &\leq \rho \left(2|\cos^2\varphi \sin\varphi| + |\cos\varphi \sin^2\varphi| \right) \leq 3\rho \to 0\,,\ \rho \to 0, \end{aligned}$$

där vi använt triangelolikheten i näst sista olikheten. Då ytterleden i denna uppskattning ej beror på φ följer det av instängningsregeln att $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 1$ d v s f blir kontinuerlig i origo omm $a = 1$.

5) Låt D_1 vara den del av D där $y \geq x^2$ och låt D_2 vara den del av D där $y \leq x^2$. En omsorgsfullt ritad figur ger sedan (I = sökt integral):

$$\begin{aligned} I &= \iint_{D_1} (y - x^2)\, dxdy + \iint_{D_2} (x^2 - y)\, dxdy = \int_0^2 \left(\int_{x^2}^{2x} (y - x^2)\, dy \right) dx + \int_0^2 \left(\int_0^{x^2} (x^2 - y)\, dy \right) dx \\ &= \int_0^2 \left(2x^2 - \frac{x^4}{2} - 2x^3 + x^4 \right) dx + \int_0^2 \left(x^4 - \frac{x^4}{2} \right) dx = \int_0^2 (x^4 - 2x^3 + 2x^2) dx = \frac{56}{15}. \end{aligned}$$

6) Låt $P : (a, b, c)$ och sätt $f(x, y, z) = x^2 + y^2 - z$ och $g(x, y, z) = z - 2x$ så att $f(x, y, z) = 0$ på S_1 och $g(x, y, z) = 3$ på S_2. Då Π ska vara vinkelrätt mot både S_1:s och S_2:s tangentplan i P följer (Rita!) att Π är parallellt med både $\nabla f(a, b, c)$ och $\nabla g(a, b, c)$. Vektorn $\bar{n} = \nabla f(a, b, c) \times \nabla g(a, b, c) = 2(b, 1-a, 2b)$ är därför en normalvektor till Π som därför får ekvationen $bx+(1-a)y+2bz = ba+(1-a)b+2bc = b+2bc$.

Att $(7, 0, 0)$ ligger i detta plan ger att $7b = b + 2bc \Leftrightarrow b = 0$ eller $c = 3$. Dessutom ligger P både på S_1 och S_2 vilket ger att $c = a^2 + b^2$ samt $c - 2a = 3$.

Fallet $b = 0$ ger därför $a^2 = c = 3 + 2a \Leftrightarrow a = 3$ eller $a = -1$ d v s detta fall ger punkterna $(a, b, c) = (3, 0, 9)$ och $(a, b, c) = (-1, 0, 1)$ och vi ser att $\bar{n}$ är parallell med $(0, 1, 0)$ i båda dessa punkter så ekvationen för Π blir $y = 0$ i båda dessa fall.

Fallet $c = 3$ ger omedelbart punkterna $(a, b, c) = (0, \pm\sqrt{3}, 3)$ och normalvektorn $\bar{n} = 2(\pm\sqrt{3}, 1, \pm 2\sqrt{3})$. För $(a, b, c) = (0, \sqrt{3}, 3)$ fås därför ekvationen $\sqrt{3}x + y + 2\sqrt{3}z = 7\sqrt{3}$ och för $(a, b, c) = (0, -\sqrt{3}, 3)$ fås ekvationen $\sqrt{3}x - y + 2\sqrt{3}z = 7\sqrt{3}$.

7) Vi ser att vektorn $(2x, -2y)$ är ortogonal mot varje kurva i kurvskaran $x^2 - y^2 = C_1$ i varje punkt. Enhetstangenten $\bar{u}$ ges alltså av $\bar{u} = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}(y, x)$ enligt de givna förutsättningarna. P s s fås $\bar{v} = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}(y, -x)$.

Enligt sats är $f'_{\bar{u}}(x, y) = \nabla f(x, y) \cdot \bar{u}$ vilket ger ekvationerna $\dfrac{yf'_x(x, y) + xf'_y(x, y)}{\sqrt{x^2 + y^2}} = xy\sqrt{x^2 + y^2}$, $\dfrac{yf'_x(x, y) - xf'_y(x, y)}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \dfrac{xy(x^2 - y^2)}{\sqrt{x^2 + y^2}}$. Vi löser ut f'_x och f'_y ur detta och får $f'_x(x, y) = x^3$, $f'_y(x, y) = y^3$.

Den första av dessa har allmänna lösningen $f(x, y) = \dfrac{x^4}{4} + g(y)$ vilket insatt i den andra ger att $g'(y) = y^3 \Leftrightarrow g(y) = \dfrac{y^4}{4} + C$ så allmänna lösningen blir $f(x, y) = \dfrac{x^4 + y^4}{4} + C$.