LINKÖPINGS UNIVERSITET
Matematiska institutionen
Fredrik Andersson

Kurskod: TATA76
Provkod: TEN1

Tentamen i TATA76 Flervariabelanalys

2015-03-16 kl 14–19

Varje uppgift bedöms med 0–3 poäng. För betyget n räcker n godkända uppgifter, d v s uppgifter bedömda med minst 2 poäng, samt totalt $3n-1$ poäng där $n = 3, 4, 5$.

Inga hjälpmedel. Ej räknedosa. För full poäng krävs att lösningarna är fullständiga, väl motiverade, ordentligt skrivna och avslutade med ett svar som är förenklat så långt det är möjligt.

Lycka till!

1) Beräkna $\displaystyle\iiint_D e^{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\,dxdydz$ där $D = \{(x,y,z); x^2+y^2+z^2 \leq 4\}$.

2a) Låt $u = ye^x$, $v = y$. Uttryck z''_{xy} i derivator med avseende på u och v om z är en $\mathcal{C}^2$-funktion av två variabler. Svaret får innehålla x och y men inte derivator m a p x eller y.

2b) Finn alla lösningar till $z'_x = yz'_y$ för $y < 0$, där z är en $\mathcal{C}^1$-funktion av två variabler, t ex genom att göra variabelbytet i 2a). Finn också den/de lösningar som uppfyller $z(x,-1) = e^{2x} + e^{3x}$.

3) Beräkna $\displaystyle\iint_D x\,dxdy$ om D ges av olikheterna $x^2 + xy + y^2 \leq 4$ och $x \geq 0$.

4a) Definiera vad det betyder att $f(x,y)$ är kontinuerlig i origo.

4b) Finns det något $a \in \mathbf{R}$ så att $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{(x-y)^2 + xy(2x-y+2)}{x^2+y^2} & \text{för} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ a & \text{för} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$

blir kontinuerlig i origo?

5) Beräkna $\displaystyle\iint_D |y - x^2|\,dxdy$ om D är triangeln med hörn i $(0,0)$, $(2,0)$ och $(2,4)$.

6) Låt S_1 vara ytan $z = x^2 + y^2$ och låt S_2 vara ytan $z - 3 = 2x$. Om P är en punkt på både S_1 och S_2, låt Π vara det plan som innehåller P och är vinkelrätt mot tangentplanen till både S_1 och S_2 i P. Ange alla P sådana att Π innehåller punkten $(7,0,0)$. Ange också en ekvation för Π i alla dessa P.

7) Låt f vara en $\mathcal{C}^2-$funktion av två variabler, definierad i den öppna första kvadranten (där alltså $x, y > 0$).

Finn alla lösningar till ekvationssystemet $\begin{cases} f'_{\bar{u}}(x,y) &= xy\sqrt{x^2+y^2} \\ f'_{\bar{v}}(x,y) &= \dfrac{xy(x^2-y^2)}{\sqrt{x^2+y^2}} \end{cases}$ om $\bar{u}$ och $\bar{v}$ är enhetstangenter till kurvorna $x^2 - y^2 = C_1$ resp. $x^2 + y^2 = C_2$ (där C_1, C_2 är konstanter), valda så att $\bar{u} \cdot \bar{e}_1 > 0$ och $\bar{v} \cdot \bar{e}_1 > 0$ där $\bar{e}_1$ är standardbasvektorn riktad längs positiva x-axeln.