LINKÖPINGS UNIVERSITET
Matematiska institutionen
Fredrik Andersson

2014-03-17

Svar m m till tentamen i TATA76 Flervariabelanalys 2014-03-17

1) Byte till sfäriska koordinater ger (I = sökt integral)

$$I = \int_0^{\sqrt{3}} \left(\int_0^{\pi} \left(\int_0^{2\pi} r^2 \sin^2\theta \cdot r^2 \sin\theta \, d\varphi \right) d\theta \right) dr = 2\pi \int_0^{\sqrt{3}} r^4 \left[-\cos\theta + \frac{1}{3}\cos^3\theta \right]_0^{\pi} dr = \frac{8\pi}{3} \left[\frac{r^5}{5} \right]_0^{\sqrt{3}} = \frac{24\sqrt{3}\pi}{5}.$$

2a) Se kursboken.

2b) Första ekvationen är ekvivalent med $z = x^3y^2 + 2x^2 + f(y)$, vilket insatt i andra ekvationen ger $2x^3y + f'(y) = 2y(x^3 - 1) \Leftrightarrow f'(y) = -2y \Leftrightarrow f(y) = -y^2 + C$ för godtycklig konstant C. Alla lösningar till systemet ges alltså av $z = x^3y^2 + 2x^2 - y^2 + C$ för godtycklig konstant C.

3) Sätt $u = y - x$, $v = x + y$ så att D övergår till $E = \{(u, v); 1 \le u \le v \le 2\}$ och $\dfrac{d(u,v)}{d(x,y)} = -2$. Detta ger ($I$ = sökt integral)

$$I = \iint_E \frac{-v - 2u}{v^4} \cdot \frac{1}{2} dudv = -\frac{1}{2} \int_1^2 \left[\frac{uv + u^2}{v^4} \right]_1^v dv = -\frac{1}{2} \int_1^2 \left(\frac{2}{v^2} - \frac{1}{v^3} - \frac{1}{v^4} \right) dv$$

$$= -\frac{1}{2} \left[-\frac{2}{v} + \frac{1}{2v^2} + \frac{1}{3v^3} \right]_1^2 = -\frac{1}{6}.$$

4a) Kalla de sökta punkterna (a, b, c). En normal till givna ytan och därmed en riktningsvektor till normallinjen ges av $\nabla f(a, b, c) = (4b^2c^4, 8abc^4, 16ab^2c^3) = 4bc^3(bc, 2ac, 4ab)$ och vi söker alltså (a, b, c) så att denna vektor är parallell med ortsvektorn till (a, b, c). Detta ger villkoret

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} bc \\ 2ac \\ 4ab \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4ab^2 - 2ac^2 \\ bc^2 - 4a^2b \\ 2a^2c - b^2c \end{bmatrix} \Leftrightarrow c^2 = 2b^2 = 4a^2$$

ty $a, b, c \neq 0$ på ytan. Då (a, b, c) ligger på den givna ytan fås $1 = 4ab^2c^4 = 4a \cdot 2a^2 \cdot (4a^2)^2 = 128a^7 \Leftrightarrow a = 1/2$ vilket ger $b = \pm 1/\sqrt{2}$ och $c = \pm 1$.

De sökta punkterna är alltså $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 1\right)$, $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}, -1\right)$, $\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 1\right)$ och $\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, -1\right)$.

4b) Enligt 4a) pekar $\nabla f(a, b, c)$ *bort* från origo i dessa punkter. Deriveringen ska alltså ske i riktningen $-\nabla f(a, b, c)$. Låt $\bar{v}$ vara en enhetsvektor som pekar i denna riktning. Då är

$$f'_{\bar{v}}(a, b, c) = \nabla f(a, b, c) \cdot \bar{v} = |\nabla f(a, b, c)||\bar{v}| \cos\pi = -4|bc^3|\sqrt{b^2c^2 + 4a^2c^2 + 16a^2b^2} = -2\sqrt{7}.$$

5) Bytet $u = x - 2$, $v = y + 1$ med $dxdy = dudv$ ger området E där $u^2 + v^2 \le 4$ och $v \ge u \ge 0$ så vi får (I = sökt integral)

$$I = \iint_E e^{u^2+v^2-5} dudv = /\text{polära}/ = e^{-5} \int_0^2 \left(\int_{\pi/4}^{\pi/2} e^{\rho^2} \rho \, d\varphi \right) d\rho = \frac{\pi}{4e^5} \left[\frac{1}{2} e^{\rho^2} \right]_0^2 = \frac{\pi}{8e^5}(e^4 - 1)$$

6) Kedjeregeln ger

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} = e^x \frac{\partial z}{\partial u}\,,\ \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y} = e^y \frac{\partial z}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial v}.$$

Kedjeregeln samt produktregeln ger sedan

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(e^x \frac{\partial z}{\partial u}\right) = e^x \frac{\partial z}{\partial u} + e^x \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial u}\right) = e^x \frac{\partial z}{\partial u} + e^x \left(\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v}\frac{\partial v}{\partial x}\right) = e^x \frac{\partial z}{\partial u} + e^{2x}\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} \\
\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial}{\partial y}\left(e^x \frac{\partial z}{\partial u}\right) = e^x \left(\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v}\frac{\partial v}{\partial y}\right) = e^{x+y}\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} + e^x \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} \\
\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} &= \frac{\partial}{\partial y}\left(e^y \frac{\partial z}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial v}\right) = \ldots = e^y \frac{\partial z}{\partial u} + e^{2y}\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} + 2e^y \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} + \frac{\partial^2 z}{\partial v^2}.
\end{aligned}$$

Insättning i ekvationen ger sedan

$$\begin{aligned}
2e^{2x-y} &= e^y \frac{\partial z}{\partial u} + e^{x+y}\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} - 2e^{x+y}\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} - 2e^x \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} + e^x \frac{\partial z}{\partial u} + e^{x+y}\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} + 2e^x \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} + e^{x-y}\frac{\partial^2 z}{\partial v^2} \\
&\quad - e^x \frac{\partial z}{\partial u} - e^y \frac{\partial z}{\partial u} = e^{x-y}\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}.
\end{aligned}$$

d v s $\dfrac{\partial^2 z}{\partial v^2} = 2e^x = 2(u - e^v) \Leftrightarrow \dfrac{\partial z}{\partial v} = 2uv - 2e^v + f(u) \Leftrightarrow z = uv^2 - 2e^v + vf(u) + g(u)$ där $f(u)$ och $g(u)$ är godtyckliga $\mathcal{C}^2$-funktioner av en variabel. Återgång till de ursprungliga variablerna ger den allmänna lösningen $z = y^2(e^x + e^y) - 2e^y + yf(e^x + e^y) + g(e^x + e^y)$.

Villkoret ger $x - 1 = z(x, 0) = -2 + g(e^x + 1) \Leftrightarrow g(e^x + 1) = x + 1 \Leftrightarrow g(t) = \ln(t - 1) + 1$

De sökta lösningarna blir alltså $z = y^2(e^x + e^y) - 2e^y + \ln(e^x + e^y - 1) + 1 + yf(e^x + e^y)$ där f är en godtycklig envariabelfunktion av klass $\mathcal{C}^2$.

7) Sätt $f(x, y) = \dfrac{\sin(x^2 + y^2)}{2x^2 + 2y^2 + xy^2}$. Då f är kontinuerlig på D_r finns enligt integralkalkylens medelvärdessats en punkt $(\xi, \eta) \in D_r$ sådan att

$$\iint_{D_r} f(x, y)\,dxdy = f(\xi, \eta) \cdot \mu(D_r) = 3\pi r^2 f(\xi, \eta).$$

Att $(\xi, \eta) \in D_r$ innebär att $r \leq \sqrt{\xi^2 + \eta^2} \leq 2r$ vilket ger att $\sqrt{\xi^2 + \eta^2} \to 0,\ r \to 0$ enligt instängningsregeln så att $(\xi, \eta) \to (0, 0)\,,\ r \to 0$. Nu är

$$f(\xi, \eta) = \frac{\sin(\xi^2 + \eta^2)}{\xi^2 + \eta^2} \cdot \frac{\xi^2 + \eta^2}{2(\xi^2 + \eta^2) + \xi\eta^2} = \frac{\sin(\xi^2 + \eta^2)}{\xi^2 + \eta^2} \cdot \frac{1}{2 + \frac{\xi\eta^2}{\xi^2 + \eta^2}}$$

Betrakta

$$0 \leq \left|\frac{\xi\eta^2}{\xi^2 + \eta^2}\right| = /\text{polära}/ = \left|\frac{\rho^3 \cos\varphi \sin^2\varphi}{\rho^2}\right| = \rho\left|\cos\varphi \sin^2\varphi\right| \leq \rho \to 0,\ \rho \to 0.$$

Då inget av ytterleden beror på φ följer det att $\dfrac{\xi\eta^2}{\xi^2 + \eta^2} \to 0,\ (\xi, \eta) \to (0, 0)$ enligt instängningsregeln.

Ett standardgränsvärde från envariabelanalysen ger sedan att $f(\xi, \eta) \to \dfrac{1}{2},\ (\xi, \eta) \to (0, 0)$.

Till sist får vi

$$\lim_{r \to 0} \frac{1}{r^2} \iint_{D_r} \frac{\sin(x^2 + y^2)}{2x^2 + 2y^2 + xy^2}\,dxdy = \lim_{r \to 0} \frac{1}{r^2} \cdot 3\pi r^2 f(\xi, \eta) = \frac{3\pi}{2}.$$