LINKÖPINGS UNIVERSITET
Matematiska institutionen
Fredrik Andersson 2013-03-16

Svar m m till tentamen i TATA76 Flervariabelanalys 2013-03-16

1) Vi ser (Rita figur!) att D begränsas av linjerna $x = 0$, $y = 2$ och $x = 2y$. Upprepad integration ger ($I =$ sökt integral)

$$I = \int_0^2 \left(\int_0^{2y} \frac{xy}{2+y^4} dx \right) dy = \int_0^2 \frac{y}{2+y^4} \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^{2y} dy = \int_0^2 \frac{2y^3}{2+y^4} dy = \left[\frac{1}{2} \ln(2+y^4) \right]_0^2 = \frac{1}{2}(\ln 18 - \ln 2) = \ln 3.$$

2) Första ekvationen är ekvivalent med att $u = x^2ye^z + f(y,z)$ för något f. Insättning i andra ger $(x^2 - 6y^2)e^z = u'_y = x^2e^z + f'_y(y,z)$ d v s $f'_y(y,z) = -6y^2e^z \Leftrightarrow f(y,z) = -2y^3e^z + g(z)$ för något g. Insättning i tredje ger till sist att $(x^2y + z - 2y^3)e^z = u'_z = x^2ye^z - 2y^3e^z + g'(z)$ d v s $g'(z) = ze^z \Leftrightarrow g(z) = (z-1)e^z + C$ för någon konstant C. Alla lösningar till systemet ges därmed av $u = (x^2y - 2y^3 + z - 1)e^z + C$ där C är en godtycklig konstant.

3a) Se kursboken.

3b) Se kursboken.

3c) Sätt $f(x,y) = \dfrac{xy(y-x)}{x^2+y^2}$. På x-axeln är $f(x,0) = 0$ så om det givna gränsvärdet existerar så är det 0. Betrakta

$$0 \le |f(x,y)| = \left| \frac{xy^2 - x^2y}{x^2+y^2} \right| = /\text{polära}/ = \left| \frac{\rho^3 \cos\varphi \sin^2\varphi - \rho^3 \cos^2\varphi \sin\varphi}{\rho^2} \right| \le /\triangle\text{-olikheten}/ \le$$
$$\le \rho \left(|\cos\varphi \sin^2\varphi| + |\cos^2\varphi \sin\varphi| \right) \le 2\rho \to 0, \rho \to 0$$

Då inget av ytterleden i denna olikhetskedja beror på φ är $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$ enl. instängningsregeln.

4) Byte till sfäriska koordinater ger ($I =$ sökt integral)

$$I = \int_0^1 \left(\int_0^{\pi/2} \left(\int_{\pi/4}^{\pi/2} (r \sin\theta \sin\varphi \cdot r\cos\theta \cdot r^2 \sin\theta)\, d\varphi \right) d\theta \right) dr = \int_0^1 r^4 \left(\int_0^{\pi/2} \sin^2\theta \cos\theta \left[-\cos\varphi \right]_{\pi/4}^{\pi/2} d\theta \right) dr$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^1 r^4 \left[\frac{1}{3} \sin^3\theta \right]_0^{\pi/2} dr = \frac{1}{3\sqrt{2}} \left[\frac{r^5}{5} \right]_0^1 = \frac{1}{15\sqrt{2}}.$$

5) Kalla tangeringspunkten (a,b,c) och sätt $f(x,y,z) = x^2 + y^2 - z = 0$ på S. Då är $\nabla f(a,b,c) = (2a, 2b, -1)$ en normalvektor till sökta tangentplanet som därför får ekvationen $2ax + 2by - z = d$ för någon konstant d. Då (a,b,c) ligger i detta plan fås $d = 2a^2 + 2b^2 - c$. Men (a,b,c) ligger också på S varför $a^2 + b^2 = c$ vilket ger $d = 2c - c = c$.

Att planet innehåller den givna linjen är ekvivalent med att $(3,1,5)$ ligger i planet och att vektorn $(1,2,0)$ är ortogonal mot planets normal. Det första av dessa villkor ger att $6a + 2b - 5 = c$ och det andra är ekvivalent med att $2a + 4b = 0$, d v s $a = -2b$ och $c = -10b - 5$. Villkoret $a^2 + b^2 = c$ ger då att $-10b - 5 = 5b^2 \Leftrightarrow b = -1$ (dubbelrot).

Det enda planet som uppfyller förutsättningarna är alltså $4x - 2y - z = 5$ som tangerar S i $(2, -1, 5)$.

6) Kedjeregeln ger

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{x}{y}\frac{\partial z}{\partial u}.$$

Med hjälp av produktregeln och kedjeregeln fås sedan

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{y}\frac{\partial z}{\partial u}\right) = \frac{1}{y}\frac{\partial z}{\partial u} + \frac{x}{y}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial u}\right) = \frac{1}{y}\frac{\partial z}{\partial u} + \frac{x}{y}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}\right) = \frac{1}{y}\frac{\partial z}{\partial u} + \frac{x\ln y}{y}\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} + \frac{x}{y}\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x}{y}\frac{\partial z}{\partial u}\right) = -\frac{x}{y^2}\frac{\partial z}{\partial u} + \frac{x}{y}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial u}\right) = -\frac{x}{y^2}\frac{\partial z}{\partial u} + \frac{x}{y}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}\right) = -\frac{x}{y^2}\frac{\partial z}{\partial u} + \frac{x^2}{y^2}\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}.$$

Detta ger

$$x\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} - y\ln y\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - (1+\ln y)\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{x}{y}\frac{\partial z}{\partial u} + \frac{x^2\ln y}{y}\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} + \frac{x^2}{y}\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v} + \frac{x\ln y}{y}\frac{\partial z}{\partial u} - \frac{x^2\ln y}{y}\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} - (1+\ln y)\frac{x}{y}\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{x^2}{y}\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}$$

d v s $\dfrac{\partial^2 z}{\partial u\partial v} = \dfrac{y^x}{x^2} = \dfrac{e^u}{v^2} \Leftrightarrow \dfrac{\partial z}{\partial u} = -\dfrac{e^u}{v} + f(u) \Leftrightarrow z = -\dfrac{e^u}{v} + F(u) + G(v)$, F primitiv funktion till f.

Allmänna lösningen blir således $z = -\dfrac{y^x}{x} + F(x\ln y) + G(x)$ för godtyckliga $\mathcal{C}^2$-funktioner F och G.

Villkoret $z(x,e) = 0$ ger nu att $0 = -\dfrac{e^x}{x} + F(x) + G(x)$ d v s $G(x) = \dfrac{e^x}{x} - F(x)$ så det följer att $z = \dfrac{e^x - y^x}{x} + F(x\ln y) - F(x)$ för något F. Detta ger $z'_y(x,y) = -y^{x-1} + \dfrac{x}{y}F'(x\ln y)$. Villkoret $z'_y(1,y) = 0$ ger därför $0 = -1 + \dfrac{1}{y}F'(\ln y) \Leftrightarrow F'(\ln y) = y \Leftrightarrow /t = \ln y/ \Leftrightarrow F'(t) = e^t \Leftrightarrow F(t) = e^t + C$.

Den sökta lösningen blir alltså $z = \dfrac{e^x - y^x}{x} + y^x + C - (e^x + C) = \dfrac{x-1}{x}(y^x - e^x)$.

7) Vi noterar först att den sökta integralen I kan skrivas $I = \displaystyle\int_0^1 z\left(\iint_{D_z} x\,dxdy\right)dz$.

D_z ges av $(x-1)^2 + y^2 \le r(z)^2$. Variabelbytet $u = x-1$, $v = y$ ger därför

$$\iint_{D_z} x\,dxdy = \iint_{u^2+v^2\le r(z)^2} (u+1)\,dudv = \iint_{u^2+v^2\le r(z)^2} u\,dudv + \iint_{u^2+v^2\le r(z)^2} 1\,dudv = \pi r(z)^2$$

ty första integralen är en udda funktion av u integrerad över en mängd som är symmetrisk m a p v-axeln och andra integralen ger arean av en cirkel med radie $r(z)$.

Låt nu P vara punkten $(0,0,z)$ och låt Q vara D_z:s medelpunkt $(1,0,z)$. Drag en linje från P som tangerar randen av D_z i en punkt R. Då är triangeln med hörn i P, Q och R rätvinklig med räta vinkeln vid R. Om α är vinkeln vid P i denna triangel så är $\dfrac{\pi z^2}{6} = 2\alpha = 2\arcsin r(z)$ d v s $r(z) = \sin\dfrac{\pi z^2}{12}$.

Detta ger

$$I = \int_0^1 z\cdot\pi\sin^2\frac{\pi z^2}{12}\,dz = /t = z^2/ = \frac{\pi}{4}\int_0^1\left(1 - \cos\frac{\pi t}{6}\right)dt = \frac{\pi}{4}\left[t - \frac{6}{\pi}\sin\frac{\pi t}{6}\right]_0^1 = \frac{\pi - 3}{4}.$$