

Tentamen i TATA76 Flervariabelanalys

2013-03-16 kl 14–19

Varje uppgift bedöms med 0–3 poäng. För betyget n räcker n godkända uppgifter, d v s uppgifter bedömda med minst 2 poäng, samt totalt $3n - 1$ poäng där $n = 3, 4, 5$.

Inga hjälpmedel. Ej räknedosa. För full poäng krävs att lösningarna är fullständiga, väl motiverade, ordentligt skrivna och avslutade med ett svar som är förenklat så långt det är möjligt.

Lycka till!

1) Beräkna $\iint_D \frac{xy}{2+y^4} dx dy$ där D är triangeln med hörn i $(0, 0)$, $(0, 2)$ och $(4, 2)$.

2) Finn alla lösningar $u = u(x, y, z) \in \mathcal{C}^2$ till systemet
$$\begin{cases} u'_x &= 2xye^z \\ u'_y &= (x^2 - 6y^2)e^z \\ u'_z &= (x^2y + z - 2y^3)e^z \end{cases}.$$

3a) Definiera vad det betyder att f är differentierbar i en punkt (a, b) .

3b) Visa att om f är differentierbar i (a, b) så är f kontinuerlig i (a, b) .

3c) Undersök gränsvärdet $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy(y-x)}{x^2+y^2}$.

4) Beräkna $\iiint_D yz dx dy dz$ där D är den del av enhetsklotet där $z \geq 0$ och $0 \leq x \leq y$.

5) Vilket tangentplan till ytan $S : z = x^2 + y^2$ innehåller linjen $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$ och var tangerar det S ?

6) Finn alla $z = z(x, y) \in \mathcal{C}^2$ som uppfyller $x \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} - y \ln y \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - (1 + \ln y) \frac{\partial z}{\partial y} = y^{x-1}$ för $x, y > 0$, t ex genom att sätta $u = x \ln y$, $v = x$. Bestäm också speciellt den/de lösningar som uppfyller $z(x, e) = 0$ och $z'_y(1, y) = 0$.

7) Låt $D \subset \mathbf{R}^3$ vara sådant att skärningen mellan D och ett plan $z = \text{konst.}$ blir en cirkelskiva D_z om $0 \leq z \leq 1$ och tom för övriga z . För D_z gäller att

- dess medelpunkt ligger på linjen $x = 1$, $y = 0$ och dess radie $r(z) < 1$ för alla $z \in [0, 1]$.
- från punkten $(0, 0, z)$ på z -axeln syns D_z under vinkeln $\frac{\pi z^2}{6}$.

Beräkna $\iiint_D xz dx dy dz$.