Linköpings universitet
Matematiska institutionen
Matematik och tillämpad matematik

Kurskod: TATA69
Provkod: TEN1

Tentamen i TATA69 Flervariabelanalys

2019-06-03 kl. 14.00–19.00

Inga hjälpmedel tillåtna (inte heller miniräknare). 8/11/14 poäng med minst 3/4/5 uppgifter med minst 2 poäng (av 3 möjliga) ger betyg 3/4/5. Länk till lösningsskiss finns efter tentamen på kursens hemsida.

1. Bestäm alla funktioner $z(x, y)$ som uppfyller ekvationssystemet

$$\begin{aligned} z'_x &= y^2 \mathrm{e}^x + 1, \\ z'_y &= 2y\mathrm{e}^x - 2, \end{aligned}$$

samt bivillkoret $z(0, y) = y^2 - 2y + 4$.

2. Bestäm tangent- och normallinjen till kurvan $y^2 - \ln x = 9$ i punkten $(x, y) = (1, 3)$.

3. Beräkna $\iint_D (3y - 2x)(2x - y)\, dxdy$, där D är triangeln med hörn i $(0, 0)$, $(2, 4)$ och $(3, 2)$.

4. Avgör om funktionen f har en lokal extrempunkt i origo om
   (a) $f(x, y, z) = 1 - x^2 - y^2 + z^3$, (1p)
   (b) $f(x, y) = 1 + x^2 + 2y^2 + \sin(xy)$. (2p)

5. Beräkna

$$\iiint_D y\mathrm{e}^{-(x^2+y^2+z^2)^2}\, dxdydz$$

där området D ges av olikheterna $x > 0$, $y < 0$ och $z < 0$.

6. Bestäm funktionalmatrisen till

$$(x, y, z) = \bar{f}(u, v) = (u^2 + v^2, u^2 - v^2, \sin(u + v))$$

i punkten $(u, v) = (\pi, 0)$. Bestäm även ekvationer för tangentplanet till parameterytan $(x, y, z) = \bar{f}(u, v)$ i punkten $\bar{f}(\pi, 0)$ på parameter- och normalform.

Lösningsskisser till TATA69 Flervariabelanalys 2019-06-03

1. Från den första ekvationen $z'_x = y^2 e^x + 1$ får vi $z = y^2 e^x + x + k(y)$. Derivation med avseende på y och användande av den andra ekvationen $z'_y = 2ye^x - 2$ ger $2ye^x + k'(y) = 2ye^x - 2$, så att $k'(y) = -2$, och därmed $k(y) = -2y + c$. Det vill säga $z(x, y) = y^2 e^x + x - 2y + c$.

   Bivillkoret ger nu $z(0, y) = y^2 - 2y + c = y^2 - 2y + 4$, d.v.s. $c = 4$.

   Svar: $z(x, y) = y^2 e^x + x - 2y + 4$.

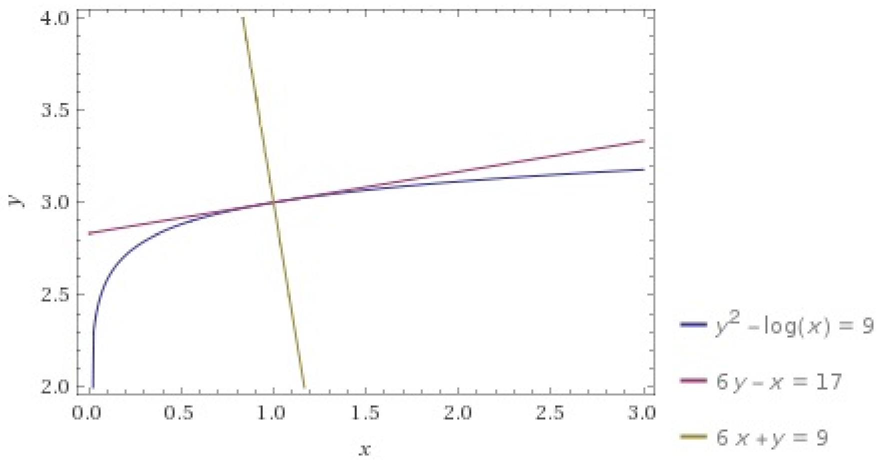
2. Om vi låter $f(x, y) = y^2 - \ln x$ gäller $f(1, 3) = 3^2 - \ln 1 = 9$, så punkten $(1, 3)$ ligger på nivåkurvan $f(x, y) = 9$.

   $\nabla f = (f'_x, f'_y) = (-1/x, 2y)$, $\nabla f(1, 3) = (-1, 6)$. Eftersom gradienten pekar i normalriktningen till nivåkurvan får vi att tangentlinjen ges av

$$\nabla f(1, 3) \bullet ((x, y) - (1, 3)) = 0 \Leftrightarrow 6y - x = 17.$$

   Eftersom $(6, 1) \bullet (-1, 6) = 0$ är $(6, 1)$ en normalvektor till normallinjen, som alltså ges av

$$(6, 1) \bullet ((x, y) - (1, 3)) = 0 \Leftrightarrow 6x + y = 9.$$



   (Alternativt kan vi skriva linjerna på parameterform. Eftersom $\nabla f(1, 3) = (-1, 6)$ pekar i normalriktningen och linjen går genom $(1, 3)$ ges normallinjen av $(x, y) = (1, 3) + t(-1, 6)$, $t \in \mathbf{R}$.

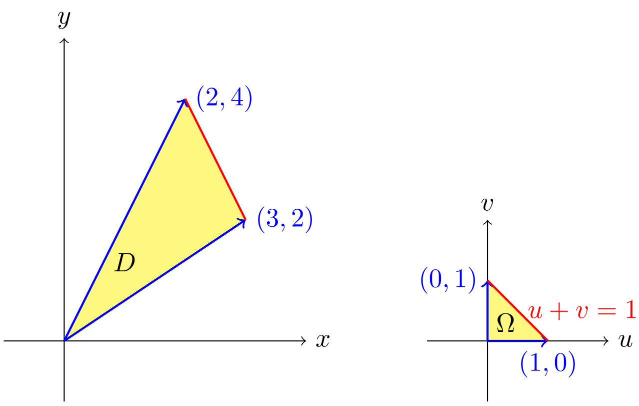
   Å andra sidan är $(6, 1)$ ortogonal mot gradienten, och pekar således i tangentriktningen, så tangentlinjen ges på parameterform av $(x, y) = (1, 3) + t(6, 1)$, $t \in \mathbf{R}$.)

   Svar: Tangentlinje: $6y - x = 17$. Normallinje: $6x + y = 9$.

3. Vi gör variabelbytet

$$\begin{cases} x = 3u + 2v \\ y = 2u + 4v \end{cases}$$

Notera att detta är ett inverterbart linjärt variabelbyte, och $(u, v) = (1, 0)$ ger $(x, y) = (3, 2)$, $(u, v) = (0, 1)$ ger $(x, y) = (2, 4)$. Alltså avbildas triangeln Ω i uv-planet på vår triangel D i xy-planet enligt nedanstående figur:



$$\frac{d(x, y)}{d(u, v)} = \begin{vmatrix} x'_u & x'_v \\ y'_u & y'_v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 8, \text{ så } dxdy = 8dudv.$$

Vidare har vi $2x - y = 2(3u + 2v) - (2u + 4v) = 4u$ och $3y - 2x = 3(2u + 4v) - 2(3u + 2v) = 8v$.

$$\iint_D (3y - 2x)(2x - y)\, dxdy = \iint_\Omega 8v \cdot 4u \cdot 8\, dudv$$
$$= 32 \int_0^1 \left(\int_0^{1-u} 8uvdv \right) du = 32 \int_0^1 \left[4uv^2\right]_{v=0}^{1-u} du = 32 \int_0^1 4u(1-u)^2 du$$
$$= 32 \int_0^1 (4u - 8u^2 + 4u^3) du = 32 \left[2u^2 - \frac{8u^3}{3} + u^4\right]_0^1 = \frac{32}{3}.$$

(Ett alternativ, som i detta fall blir lite jobbigare, är att dela upp integralen i två delar:

$$\int_0^2 \left(\int_{2x/3}^{2x} (3y - 2x)(2x - y) dy \right) dx + \int_2^3 \left(\int_{2x/3}^{-2x+8} (3y - 2x)(2x - y) dy \right) dx =$$
$$\ldots = \frac{128}{27} + \frac{160}{27} = \frac{32}{3}.)$$

Svar: 32/3.

4. (a) Eftersom $f(0,0,z) = 1 + z^3$ uppfyller att $f(0,0,z) < f(0,0,0)$ om $z < 0$ men $f(0,0,z) > f(0,0,0)$ om $z > 0$ så har f ingen extrempunkt i origo.
Svar: Origo är inte en extrempunkt till f.

(b) Vi använder att $\sin t = t + \mathcal{O}(t^3)$ med $t = xy$.

$$\begin{aligned} f(x,y) &= 1 + x^2 + 2y^2 + \sin(xy) = 1 + x^2 + y^2 + (xy + \mathcal{O}((xy)^3) \\ &= 1 + x^2 + xy + 2y^2 + \mathcal{O}(|(x,y)|^6). \end{aligned}$$

Vi ser alltså att $\nabla f(0,0) = 0$, så det är en stationär punkt, och den kvadratiska formen uppfyller

$$x^2 + xy + 2y^2 = (x + y/2)^2 + \frac{7y^2}{4}.$$

Alltså är den positivt definit, så punkten är en lokal minpunkt.
(Man kan även skriva

$$x^2 + xy + 2y^2 = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1/2 \\ 1/2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

och beräkna egenvärdena

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1/2 \\ 1/2 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(2-\lambda) - 1/4 = 0 \Leftrightarrow \lambda = \frac{3 \pm \sqrt{2}}{2}.$$

Eftersom båda dessa är positiva är den kvadratiska formen positivt definit.)

Svar: Origo är ett lokalt minimum till f.

5. Vi använder sfäriska (rymdpolära) koordinater. Vi vet att xy-planet ges av att $\theta = \pi/2$, och området $x > 0, y < 0$ ges av att $-\pi/2 < \varphi < 0$.

Alltså ges området D av att $-\pi/2 < \varphi < 0$, $\pi/2 < \theta < \pi$ och $r > 0$.

Integranden är negativ på hela integrationsområdet och integralen är endast generaliserad i oändligheten. Alltså räcker det att kolla på en uttömmande följd, och vi tömmer ut D med områdena D_R som ges av att $-\pi/2 < \varphi < 0$, $\pi/2 < \theta < \pi$ och $0 < r < R$.

$$\begin{aligned} &\iiint_{D_R} y\mathrm{e}^{-(x^2+y^2+z^2)^2}\,dxdydz = \int_{-\pi/2}^{0} \left(\int_{\pi/2}^{\pi} \left(\int_0^R r \sin\theta \sin\varphi \cdot \mathrm{e}^{-r^4} \cdot r^2 \sin\theta\, dr \right) d\theta \right) d\varphi \\ &= \int_{-\pi/2}^{0} \sin\varphi\, d\varphi \cdot \int_{\pi/2}^{\pi} \sin^2\theta\, d\theta \cdot \int_0^R r^3 \mathrm{e}^{-r^4}\, dr \\ &= [-\cos\varphi]_{-\pi/2}^{0} \cdot \left[\frac{\theta}{2} - \frac{\sin(2\theta)}{4} \right]_{\pi/2}^{\pi} \cdot \left[\frac{-\mathrm{e}^{-r^4}}{4} \right]_0^R = -\frac{\pi}{4} \left(\frac{1}{4} - \frac{-\mathrm{e}^{-R^4}}{4} \right) \to -\frac{\pi}{16} \text{ då } R \to \infty. \end{aligned}$$

Svar: Integralen är konvergent med värdet $-\pi/16$.

6. Om vi använder matrisnotation gäller

$$\overline{f}(u,v) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u^2+v^2 \\ u^2-v^2 \\ \sin(u+v) \end{pmatrix}.$$

Funktionalmatrisen ges av

$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v)} = \begin{pmatrix} x'_u & x'_v \\ y'_u & y'_v \\ z'_u & z'_v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2u & 2v \\ 2u & -2v \\ \cos(u+v) & \cos(u+v) \end{pmatrix},$$

så

$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v)}(\pi,0) = \begin{pmatrix} 2\pi & 0 \\ 2\pi & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Eftersom

$$\overline{f}(\pi,0) = \begin{pmatrix} \pi^2 \\ \pi^2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ges tangentplan på parameterform av

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \pi^2 \\ \pi^2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2\pi & 0 \\ 2\pi & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix}, \quad h,k \in \mathbb{R},$$

eller ekvivalent

$$(x,y,z) = (\pi^2,\pi^2,0) + h(2\pi,2\pi,-1) + k(0,0,-1), \quad h,k \in \mathbb{R}.$$

(Notera att $\overline{f}(\pi+h, 0+k) = \overline{f}(\pi,0) + \frac{\partial \overline{f}}{\partial(u,v)}(\pi,0)\begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} +$ restterm, så tangentplanet ges av att ta bort resttermen i detta uttryck.)

För att få en normalvektor kan vi kryssa tangentvektorerna:

$$(2\pi,2\pi,-1)\times(0,0,-1) = (-2\pi,2\pi,0) = -2\pi(1,-1,0).$$

Så tangentplanet ges på normalform av

$$(1,-1,0)\cdot((x,y,z)-(\pi^2,\pi^2,0)) = 0 \Leftrightarrow x-y=0.$$

Svar: Funktionalmatris: $\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v)}(\pi,0) = \begin{pmatrix} 2\pi & 0 \\ 2\pi & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}.$

Tangentplan på parameterform:

$$(x,y,z) = (\pi^2,\pi^2,0) + h(2\pi,2\pi,-1) + k(0,0,-1), \quad h,k \in \mathbb{R}.$$

Tangentplan på normalform: $x-y=0$.