Linköpings universitet
Matematiska institutionen
Matematik och tillämpad matematik

Kurskod: TATA69
Provkod: TEN1

Tentamen i TATA69 Flervariabelanalys

2019-01-09 kl. 8.00–13.00

Inga hjälpmedel tillåtna (inte heller miniräknare). 8/11/14 poäng med minst 3/4/5 uppgifter med minst 2 poäng (av 3 möjliga) ger betyg 3/4/5. Länk till lösningsskiss finns efter tentamen på kursens hemsida.

1. Bestäm alla funktioner $f(x, y, z)$ som uppfyller

$$\begin{aligned} f'_x(x, y, z) &= 2xze^z - y, \\ f'_z(x, y, z) &= x^2e^z + zx^2e^z + ze^y, \\ f(1, y, 0) &= y. \end{aligned}$$

2. Beräkna

$$\iiint_D \frac{yz}{x^2 + y^2 + z^2}\, dxdydz,$$

där D ges av $1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 9$, $0 \leq x \leq y$ och $z \geq 0$.

3. Bestäm alla tangentplan till ytan $x^2 + y^2 - z^2 = 1$ som är parallella med planet $3x - 2y + 2z = 0$.

4. Beräkna

$$\iint_D x\, dxdy, \quad D = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 2 \text{ och } y \leq x \leq 1\}.$$

5. (a) Definiera vad som menas med att funktionen $f\colon \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ har lokalt minimum i punkten $(0, 0)$. (1p)

   (b) För vilka värden på konstanten $k \in \mathbf{R}$ har $f(x, y) = x^2 + kxy + 9y^2 + y^3$ lokalt minimum i $(0, 0)$? (2p)

6. Ekvationen $x^7 + x = 2$ har exakt en reell lösning, $x = 1$. Visa att om man ändrar ekvationen till $x^7 + (1 + \varepsilon)\, x = 2$ så blir lösningen $x(\varepsilon)$ en $\mathcal{C}^1$-funktion av ε, för ε nära noll. Ange $x(0)$ och $x'(0)$, och bestäm med hjälp av detta en approximation till lösningen av ekvationen $x^7 + \frac{101}{100}\, x = 2$.

Lösningsskisser till TATA69 Flervariabelanalys 2019-01-09

1. Integration av den första ekvationen $f'_x(x,y,z) = 2xze^z - y$ ger $f(x,y,z) = x^2ze^z - xy + g(y,z)$. Insättning av detta i den andra ekvationen $f'_z(x,y,z) = x^2e^z + zx^2e^z + ze^y$ ger $x^2(e^z + ze^z) + g'_z(y,z) = x^2e^z + zx^2e^z + ze^y$, dvs. $g'_z(y,z) = ze^y$. Integration av detta ger $g(y,z) = \frac{1}{2}z^2e^y + h(y)$. Därmed vet vi att
$$f(x,y,z) = x^2ze^z - xy + \tfrac{1}{2}z^2e^y + h(y).$$
Det sista villkoret $f(1,y,0) = y$ ger nu $0 - y + 0 + h(y) = y$, alltså $h(y) = 2y$.

   Svar: $f(x,y,z) = x^2ze^z - xy + \frac{1}{2}z^2e^y + 2y$.

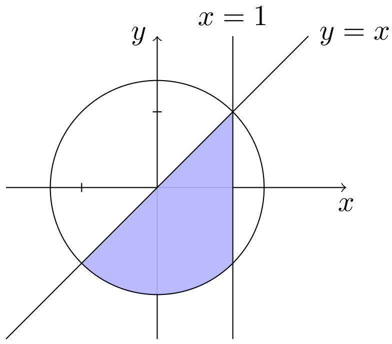
2. Rymdpolära koordinater ger
$$\iiint_D \frac{yz}{x^2+y^2+z^2}\,dxdydz$$
$$= \iiint\limits_{\substack{1\le r\le 3\\ 0\le\theta\le\frac{\pi}{2}\\ \frac{\pi}{4}\le\varphi\le\frac{\pi}{2}}} \frac{r\sin\varphi\sin\theta\cdot r\cos\theta}{r^2}\, r^2\sin\theta\, drd\theta d\varphi$$
$$= \Big[\tfrac{1}{3}r^3\Big]_1^3 \Big[\tfrac{1}{3}\sin^3\theta\Big]_0^{\pi/2} \Big[-\cos\varphi\Big]_{\pi/4}^{\pi/2} = \frac{26}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

   Svar: $13\sqrt{2}/9$.

3. Svaret måste uppenbart ha formen $3x - 2y + 2z = D$. Kalla den sökta tangeringspunkten för (a,b,c); när vi har hittat den kan vi sedan beräkna $D = 3a - 2b + 2c$. Ytans normalvektor i den punkten ska vara parallell med normalvektorn för det givna planet $3x - 2y + 2z = 0$:
$$\begin{pmatrix} 2a \\ 2b \\ -2c \end{pmatrix} \parallel \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad\Longleftrightarrow\qquad \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = k\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad k\in\mathbf{R}.$$
Punkten måste också uppfylla ytans ekvation, $a^2+b^2-c^2 = 1$. Insättning av $a = 3k$, $b = -2k$, $c = -2k$ i detta ger $(9+4-4)k^2 = 1$, dvs. $k = \pm\frac{1}{3}$. Alltså är $(a,b,c) = \pm(1, -\frac{2}{3}, -\frac{2}{3})$, vilket ger $D = \pm(3 + \frac{4}{3} - \frac{4}{3}) = \pm 3$.

   Svar: Det finns två sådana tangentplan, $3x - 2y + 2z = \pm 3$.

4. Området D ser ut såhär (cirkeln har radien $\sqrt{2}$, linjen $y = x$ skär den i punkterna $\pm(1,1)$):



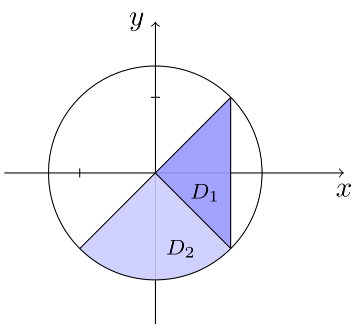
Vi kan alltså direkt räkna ut integralen i kartesiska koordinater:

$$\begin{aligned}\iint_D x\,dxdy &= \int_{x=-1}^{1} \left(\int_{y=-\sqrt{2-x^2}}^{x} x\,dy \right) dx \\ &= \int_{x=-1}^{1} \left(x^2 + x\sqrt{2-x^2} \right) dx \\ &= \left[\tfrac{1}{3}x^3 - \tfrac{1}{3}(2-x^2)^{3/2} \right]_{-1}^{1} = \frac{2}{3}.\end{aligned}$$

(Här behöver man egentligen inte ens räkna ut primitiv funktion till $x\sqrt{2-x^2}$; det är ju en udda funktion, så $\int_{-1}^{1} x\sqrt{2-x^2}\,dx$ måste bli noll.)

Alternativ lösning: Med uppdelning i delområden D_1 och D_2 enligt figuren nedan blir $\iint_{D_2} x\,dxdy = 0$ av symmetriskäl, vilket ger

$$\iint_D x\,dxdy = \iint_{D_1} x\,dxdy = \int_{x=0}^{1} \left(\int_{y=-x}^{x} x\,dy \right) dx = \int_0^1 2x^2\,dx = \frac{2}{3}.$$



Svar: $2/3$.

5. (a) Det betyder att det finns en omgivning D till $(0,0)$ sådan att $f(x,y) \geq f(0,0)$ för alla $(x,y) \in D$.

   (b) Till att börja med är $f'_x(0,0) = f'_y(0,0) = 0$, så att $(0,0)$ är en stationär punkt. Vidare är f ett polynom, så att det är sin egen Maclaurinutveckling:

$$f(x,y) = x^2 + kxy + 9y^2 + y^3 = \underbrace{\Big(x + \tfrac{k}{2}y\Big)^2 + \Big(9 - \tfrac{k^2}{4}\Big)y^2}_{=Q(x,y)} + \underbrace{y^3}_{\text{restterm}},$$

   där den kvadratiska formen Q är positivt definit om $9 - \frac{k^2}{4} > 0$ och indefinit om $9 - \frac{k^2}{4} < 0$. Origo är alltså en (sträng) lokal minimipunkt för f om $|k| < 6$ och en sadelpunkt om $|k| > 6$. I gränsfallet $|k| = 6$ är Q är positivt semidefinit, så annan undersökning krävs; man ser att $f(x,y) = (x \pm 3y)^2 + y^3$ inte har lokalt extremvärde i origo eftersom $f(\mp 3t, t) = t^3$ är positivt för $t > 0$ och negativt för $t < 0$.

   Svar: $f(x,y)$ har lokalt minimum i origo då $-6 < k < 6$.

6. Funktionen $F(x,\varepsilon) = x^7 + (1+\varepsilon)\,x$ är av klass $\mathcal{C}^1$, punkten $(x,\varepsilon) = (1,0)$ uppfyller $F(x,\varepsilon) = 2$, och $F'_x(1,0) = [7x^6 + 1 + \varepsilon]_{(1,0)} = 8 \neq 0$, så enligt implicita funktionssatsen definierar ekvationen $F(x,\varepsilon) = 2$ en $\mathcal{C}^1$-funktion $x(\varepsilon)$ lokalt kring $(x,\varepsilon) = (1,0)$. Per definition är $x(0) = 1$, och implicit derivering ger

$$x'(0) = -\frac{F'_\varepsilon(1,0)}{F'_x(1,0)} = -\frac{1}{8}.$$

   Lösningen till ekvationen $x^7 + \frac{101}{100}\,x = 2$, alltså $x(\frac{1}{100})$, bör därför vara ungefär

$$x(\tfrac{1}{100}) \approx x(0) + \tfrac{1}{100}\,x'(0) = 1 + \tfrac{1}{100} \cdot \tfrac{-1}{8} = \tfrac{799}{800}.$$

   Svar: $x(0) = 1$, $x'(0) = -1/8$, approximativ lösning $799/800$.

   (Anm.: Utan noggrannare undersökning, t.ex. genom uppskattning av $|x''(\varepsilon)|$, kan vi naturligtvis inte säga någonting om hur *bra* denna approximation är, för hur vet vi att $\varepsilon = \frac{1}{100}$ är tillräckligt litet för att approximation med hjälp av förstaderivatan ska vara användbart? Numerisk lösning av ekvationen ger dock $x(\frac{1}{100}) \approx 0{,}998747456$, så vårt värde $\frac{799}{800} = 0{,}99875$ var inte jättelångt ifrån.)