Linköpings universitet
Matematiska institutionen
Matematik och tillämpad matematik

Kurskod: TATA69
Provkod: TEN1

Tentamen i TATA69 Flervariabelanalys

2018-10-24 kl. 8.00–13.00

Inga hjälpmedel tillåtna (inte heller miniräknare). 8/11/14 poäng med minst 3/4/5 uppgifter med minst 2 poäng (av 3 möjliga) ger betyg 3/4/5. Länk till lösningsskiss finns efter tentamen på kursens hemsida.

1. Bestäm alla funktioner $f(x,y)$ av klass $\mathcal{C}^1$ som uppfyller
$$\frac{\partial f}{\partial x} + 2x\,\frac{\partial f}{\partial y} = 3y, \qquad f(1,y) = 0.$$
(Förslag: byt till nya variabler $u = x$ och $v = y - x^2$.)

2. Beräkna $\iint_D (x-1)\,dxdy$, där
$$D = \Big\{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : x^2 + y^2 \le 4 \text{ och } x \le y \le 0\Big\}.$$

3. Obs! På uppgift 3 ska **enbart svar** lämnas in!
   (a) Bestäm den linje $Ax + By = C$ som tangerar kurvan $3x^2 + 2y = 7 + \sin(2x - y)$ i punkten $(x,y) = (1,2)$.
   (b) Bestäm riktningsderivatan av $f(x,y) = x^2 - y^4$ i punkten $(3,2)$, i den riktning som pekar därifrån mot punkten $(0,4)$.
   (c) Sambandet $y^5 + ye^{3x} - x = 2$ definierar en funktion $y = f(x)$, $x \in \mathbf{R}$. Ange $f(0)$ och $f'(0)$.

4. Beräkna $\iiint_D z^2\,dxdydz$, där
$$D = \Big\{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 : z \ge \sqrt{\frac{x^2+y^2}{3}} \text{ och } x^2 + y^2 + z^2 \le 1\Big\}.$$

5. Undersök $f'_x(0,0)$ och $f'_y(0,0)$, där
$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3 + x^4 + y^2}{x^2 + xy + y^2}, & (x,y) \ne (0,0), \\ 0, & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

6. Undersök om $f(x,y) = e^{2x+y} - 2x - y - 4xy$ har lokalt extremvärde i origo.

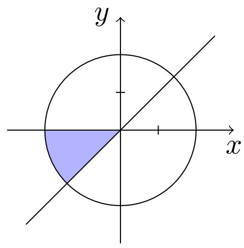
Lösningsskisser till TATA69 Flervariabelanalys 2018-10-24

1. Kedjeregeln ger $f'_x = f'_u - 2xf'_v$ och $f'_y = f'_v$, så PDE:n blir i nya variabler $f'_u = 3(v + u^2)$, vilket ger $f = 3uv + u^3 + g(v) = -2x^3 + 3xy + g(y - x^2)$, där g är en godtycklig $\mathcal{C}^1$-funktion av en variabel. Villkoret $0 = f(1, y) = -2 + 3y + g(y - 1)$ ger sedan $g(t) = 2 - 3(t + 1) = -1 - 3t$.

   Svar: $f(x, y) = -2x^3 + 3xy - 1 - 3(y - x^2)$.

2. Byte till planpolära koordinater ger

$$\begin{aligned}
&\iint_D (x-1)\,dxdy \\
&= \int_{\varphi=\pi}^{5\pi/4} \left(\int_{\rho=0}^{2} (\rho\cos\varphi - 1)\,\rho\,d\rho \right) d\varphi \\
&= \int_{\varphi=\pi}^{5\pi/4} \left(\tfrac{2^3}{3}\cos\varphi - \tfrac{2^2}{2} \right) d\varphi \\
&= \left[\tfrac{8}{3}\sin\varphi - 2\varphi\right]_{\pi}^{5\pi/4} = \tfrac{8}{3}\cdot\left(-\tfrac{1}{\sqrt{2}}\right) - 2\cdot\tfrac{\pi}{4}.
\end{aligned}$$



   Svar: $-\left(\dfrac{4\sqrt{2}}{3} + \dfrac{\pi}{2}\right)$.

   (Man kan även skriva $\iint_D (x-1)\,dxdy = \iint_D x\,dxdy - \iint_D dxdy = I_1 - I_2$ och räkna ut I_1 som ovan, men istället utnyttja att I_2 är arean av D, en åttondel av en cirkel: $I_2 = \frac{1}{8}\cdot\pi\cdot 2^2 = \frac{\pi}{2}$.)

3. **Svar:** (a) $4x + 3y = 10$ (b) $-82/\sqrt{13}$ (c) $f(0) = 1$, $f'(0) = -1/3$.

   (a) Skriv kurvan som $f(x, y) = 3x^2 + 2y - \sin(2x - y) = 7$. Då är $\nabla f(x, y) = \begin{pmatrix} 6x - 2\cos(2x-y) \\ 2 + \cos(2x-y) \end{pmatrix}$ och alltså $\nabla f(1, 2) = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$. Detta är en normalvektor till tangentlinjen. vars ekvation därmed blir $4x + 3y = C$, där C bestäms genom att sätta in $(x, y) = (1, 2)$.

   (b) Vektorn från punkten $(3, 2)$ till punkten $(0, 4)$ är $\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}$, så enhetsvektorn i den riktningen är $\mathbf{v} = \frac{1}{\sqrt{13}}\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}$. Riktningsderivatan ges av formeln $f'_{\mathbf{v}}(3, 2) = \nabla f(3, 2) \cdot \mathbf{v}$, där $\nabla f(x, y) = \begin{pmatrix} 2x \\ -4y^3 \end{pmatrix}$.

   (c) Insättning av $x = 0$ i det givna sambandet $y^5 + ye^{3x} - x = 2$ ger $y^5 + y = 2$. Inspektion ger att $y = 1$ är en lösning, och detta är den enda reella lösningen, eftersom vänsterledet är en strängt växande funktion av y. Alltså $f(0) = 1$. Implicit derivering ger $5y^4y' + y'e^{3x} + 3ye^{3x} - 1 = 0$, vilket då $x = 0$ och $y = 1$ blir $5y' + y' + 3 - 1 = 0$, dvs. $y' = -1/3 = f'(0)$.

4. I rymdpolära koordinater fås ett motsvarande område E som ges av $0 \leq r \leq 1$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ och $0 \leq \theta \leq \pi/3$. Alltså:

$$\begin{aligned}
\iiint_D z^2\,dxdydz &= \iiint_E (r\cos\theta)^2\, r^2 \sin\theta\, drd\theta d\varphi \\
&= 2\pi \left(\int_{r=0}^{1} r^4\,dr\right)\left(\int_{\theta=0}^{\pi/3} \cos^2\theta \sin\theta\,d\theta\right) \\
&= 2\pi \cdot \tfrac{1}{5} \cdot \left[-\tfrac{1}{3}\cos^3\theta\right]_0^{\pi/3} = 2\pi \cdot \tfrac{1}{15} \cdot \left(1 - \tfrac{1}{8}\right).
\end{aligned}$$

Svar: $7\pi/60$.

(Man kan även använda stavar i z-led, $\iint_{\tilde{D}} \left(\int_{z=\sqrt{(x^2+y^2)/3}}^{\sqrt{1-x^2-y^2}} z^2\,dz\right) dxdy$ där $\tilde{D}$ är cirkelskivan $x^2 + y^2 \leq 3/4$, men detta ger jobbigare uträkningar.)

5. Derivatan $f'_x(0,0)$ är lika med nedanstående gränsvärde, om det existerar (ändligt):

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{h^3+h^4+0}{h^2+0+0} - 0}{h} = \lim_{h\to 0}(1+h) = 1.$$

Alltså är $f'_x(0,0) = 1$. För att undersöka $f'_y(0,0)$ betraktar vi gränsvärdet

$$\lim_{k\to 0} \frac{f(0,k) - f(0,0)}{k} = \lim_{k\to 0} \frac{\frac{0+0+k^2}{0+0+k^2} - 0}{k} = \lim_{k\to 0} \frac{1}{k}.$$

Detta gränsvärde existerar ej ändligt. (Och det existerar ju för övrigt inte i oegentlig mening heller, eftersom $\frac{1}{k} \to \pm\infty$ då $k \to 0^{\pm}$.)

Svar: $f'_x(0,0) = 1$, $f'_y(0,0)$ existerar ej.

6. Från Maclaurinutvecklingen

$$\begin{aligned}
f(x,y) &= e^{2x+y} - 2x - y - 4xy \\
&= 1 + (2x+y) + \tfrac{1}{2!}(2x+y)^2 + O(\rho^3) - 2x - y - 4xy \\
&= 1 + \tfrac{1}{2}((2x+y)^2 - 8xy) + O(\rho^3) \\
&= 1 + \tfrac{1}{2}(2x-y)^2 + O(\rho^3), \qquad \rho = \sqrt{x^2+y^2},
\end{aligned}$$

ser man att origo är en stationär punkt för f (eftersom förstagradstermer saknas). Den kvadratiska formen $Q(x,y) = (2x-y)^2$ är dock bara positivt **semi**definit, så kan vi inte enbart från Q avgöra om det är en lokal extrempunkt eller inte. Låt oss istället undersöka närmare hur f beter sig i de punkter där $Q(x,y) = 0$, dvs. längs linjen $(x,y) = (t,2t)$:

$$\begin{aligned}
f(t,2t) &= e^{4t} - 4t - 8t^2 \\
&= 1 + 4t + \tfrac{1}{2!}(4t)^2 + \tfrac{1}{3!}(4t)^3 + O(t^4) - 4t - 8t^2 \\
&= 1 + \tfrac{32}{3}t^3 + O(t^4) \\
&= 1 + t^3\Big(\tfrac{32}{3} + O(t)\Big).
\end{aligned}$$

Uttrycket inom parentes är positivt för alla t tillräckligt nära noll (eftersom det går mot $\frac{32}{3}$ då $t \to 0$), medan faktorn t^3 framför växlar tecken. Det finns alltså något $\delta > 0$ sådant att $f(t,2t) < 1$ i intervallet $-\delta < t < 0$ och $f(t,2t) > 1$ i intervallet $0 < t < \delta$, och därmed är $f(0,0) = 1$ varken ett lokalt minimum eller ett lokalt maximum.

Svar: f har inte lokalt extremvärde i origo.