

Tentamen i TATA69 Flervariabelanalys

2018-08-23 kl. 14.00–19.00

Inga hjälpmedel tillåtna (inte heller miniräknare). 8/11/14 poäng med minst 3/4/5 uppgifter med minst 2 poäng (av 3 möjliga) ger betyg 3/4/5. Länk till lösningsskiss finns efter tentamen på kursens hemsida.

1. Bestäm alla lokala maximi- och minimipunkter för $f(x, y) = 6xy - 3y^2 - 2x^3$.
2. Bestäm alla linjer $Ax + By = C$ som tangerar kurvan $4x^2 + y^2 - 6y = 0$ och går genom punkten $(x, y) = (3, 0)$. Rita kurvan och dessa linjer i en noggrann figur.
3. Beräkna $\iint_D |x - y| \, dx dy$, där området D ges av $x^2 + y^2 \leq 4$ och $x \geq 0$.
4. Ange en partiell differentialekvation av formen

$$A(x, y) z'_x + B(x, y) z'_y = C(x, y)$$

sådan att $z(x, y) = x^5 + f(x^3 - y^4)$ är en lösning för varje deriverbar envariabelfunktion $f(t)$.

(En icke-trivial PDE sökes, dvs. det triviala svaret med $A = B = C = 0$ gills inte!)

5. Beräkna massan av den kropp D som ges av $x^2 + y + z^{1/2} \leq 1$ och $x, y, z \geq 0$, ifall massdensiteten i punkten (x, y, z) är x .
6. Beräkna $f''_{xz}(0, 0, 0)$ och $f''_{zx}(0, 0, 0)$ för funktionen

$$f(x, y, z) = \begin{cases} \frac{xz^3}{x^2 + y^2 + z^2}, & (x, y, z) \neq (0, 0, 0), \\ 0, & (x, y, z) = (0, 0, 0). \end{cases}$$

Lösningsskisser till TATA69 Flervariabelanalys 2018-08-23

1. Från $f'_x = 6y - 6x^2 = 0$ och $f'_y = 6x - 6y = 0$ fås de stationära punkterna $(x, y) = (0, 0)$ och $(x, y) = (1, 1)$. Den kvadratiske formen i Taylorutvecklingen är

$$Q_{(0,0)}(h, k) = 12hk - 6k^2 = -6(k - h)^2 + 6h^2 \quad (\text{indefinit})$$

respektive

$$Q_{(1,1)}(h, k) = -12h^2 + 12hk - 6k^2 = -6(k - h)^2 - 6h^2 \quad (\text{neg. def.}).$$

Svar: f har lokalt maximum i punkten $(1, 1)$. (Lokalt minimum saknas.)

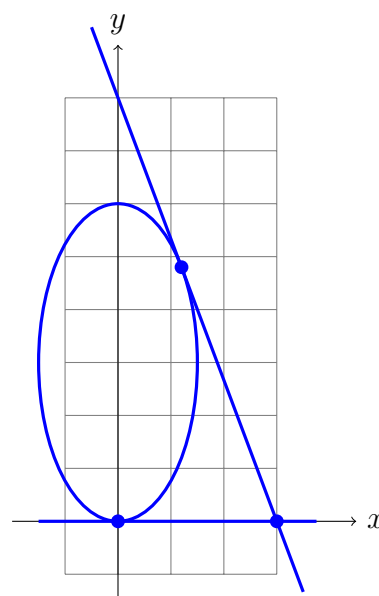
2. Sätt $f(x, y) = 4x^2 + y^2 - 6y$ och antag att den sökta linjen tangerar kurvan $f(x, y) = 0$ i punkten $(x, y) = (a, b)$. För detta krävs att $f(a, b) = 0$ och att $\nabla f(a, b)$ är vinkelrät mot vektorn från $(3, 0)$ till (a, b) :

$$4a^2 + b^2 - 6b = 0, \quad \begin{pmatrix} 8a \\ 2b - 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a - 3 \\ b - 0 \end{pmatrix} = 0.$$

Den andra av dessa ekvationer minus två gånger den första ger $-24a + 6b = 0$, dvs. $b = 4a$. Insättning av detta i den första ekvationen ger $20a^2 - 24a = 0$, dvs. $a = 0$ eller $a = 6/5$. Tangentpunkten är alltså $(0, 0)$ eller $(\frac{6}{5}, \frac{24}{5})$.

Kurvan $4x^2 + y^2 - 6y = 0 \iff \left(\frac{x}{3/2}\right)^2 + \left(\frac{y-3}{3}\right)^2 = 1$ är en ellips med centrum i $(0, 3)$ och halvaxlar av längd $\frac{3}{2}$ resp. 3.

Svar: Tangentlinjerna är $y = 0$ och $8x + 3y = 24$.



3. Linjen $y = x$ delar halvcirkelskivan D i två delområden, D_1 nedanför linjen (alltså där $y \leq x$ så att $|x - y| = x - y$) och D_2 ovanför (där $|x - y| = -(x - y)$). Polära koordinater ger sedan

$$\begin{aligned} \iint_D |x - y| \, dx dy &= \iint_{D_1} (x - y) \, dx dy - \iint_{D_2} (x - y) \, dx dy \\ &= \int_{\varphi=-\pi/2}^{\pi/4} \left(\int_{\rho=0}^2 \rho^2 (\cos \varphi - \sin \varphi) \, d\rho \right) d\varphi \\ &\quad - \int_{\varphi=\pi/4}^{\pi/2} \left(\int_{\rho=0}^2 \rho^2 (\cos \varphi - \sin \varphi) \, d\rho \right) d\varphi \\ &= \frac{8}{3} [\sin \varphi + \cos \varphi]_{-\pi/2}^{\pi/4} - \frac{8}{3} [\sin \varphi + \cos \varphi]_{\pi/4}^{\pi/2} \\ &= \frac{8}{3} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} - (-1) - 0 \right) - \frac{8}{3} \left(1 + 0 - \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \\ &= \frac{8}{3} (\sqrt{2} + \sqrt{2}). \end{aligned}$$

Svar: $16\sqrt{2}/3$.

4. Derivering av $z(x, y) = x^5 + f(x^3 - y^4)$ med kedjeregeln ger

$$z'_x(x, y) = 5x^4 + 3x^2 f'(x^3 - y^4), \quad z'_y(x, y) = -4y^3 f'(x^3 - y^4).$$

För att få en ekvation som uppfylls oavsett vad f är, måste vi kombinera dessa derivator så att termerna innehållande f' tar ut varandra, såhär:

$$\begin{aligned} 4y^3 z'_x + 3x^2 z'_y &= 4y^3(5x^4 + 3x^2 f'(x^3 - y^4)) + 3x^2(-4y^3 f'(x^3 - y^4)) \\ &= 20x^4 y^3 + (12x^2 y^3 - 12x^2 y^3) f'(x^3 - y^4) \\ &= 20x^4 y^3. \end{aligned}$$

Svar: $4y^3 z'_x + 3x^2 z'_y = 20x^4 y^3$.

5. Massan är

$$\begin{aligned} \iiint_D x \, dx \, dy \, dz &= \iint_{\substack{x^2+y \leq 1 \\ x, y \geq 0}} \left(\int_{z=0}^{(1-x^2-y)^2} x \, dz \right) dx \, dy \\ &= \int_{x=0}^1 \left(\int_{y=0}^{1-x^2} x(1-x^2-y)^2 dy \right) dx \\ &= \int_{x=0}^1 \left[-\frac{1}{3}x(1-x^2-y)^3 \right]_{y=0}^{1-x^2} dx \\ &= \int_{x=0}^1 \frac{1}{3}x(1-x^2)^3 dx = \left[-\frac{1}{24}(1-x^2)^4 \right]_0^1 = \frac{1}{24}. \end{aligned}$$

Svar: $1/24$.

6. För $(x, y, z) \neq (0, 0, 0)$ är

$$f'_x(x, y, z) = \frac{\partial}{\partial x} \frac{xz^3}{x^2 + y^2 + z^2} = \frac{(-x^2 + y^2 + z^2)z^3}{(x^2 + y^2 + z^2)^2},$$

och direkt från derivatans definition fås

$$f'_x(0, 0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h, 0, 0) - f(0, 0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0 - 0}{h} = 0.$$

Detta ger

$$f''_{xz}(0, 0, 0) = \lim_{l \rightarrow 0} \frac{f'_x(0, 0, l) - f'_x(0, 0, 0)}{l} = \lim_{l \rightarrow 0} \frac{l^5/l^4 - 0}{l} = 1.$$

Liknande uträkningar visar att $f'_z(x, 0, 0) = 0$ för alla x , vilket medför att $f''_{zx}(0, 0, 0) = 0$.

Svar: $f''_{xz}(0, 0, 0) = 1$ och $f''_{zx}(0, 0, 0) = 0$.