

## Tentamen i TATA69 Flervariabelanalys

2017-10-20 kl. 14.00–19.00

Inga hjälpmedel tillåtna (inte heller miniräknare). 8/11/14 poäng med minst 3/4/5 uppgifter med minst 2 poäng (av 3 möjliga) ger betyg 3/4/5. Länk till lösningsskiss finns efter tentamen på kursens hemsida.

1. Bestäm alla lokala maximi- och minimipunkter för  $f(x, y) = 3x^2 + y^2 + 4xy + \frac{2}{3}x^3$ .
2. Beräkna  $\iint_D \frac{xy}{1 + (x^2 + y^2)^4} dx dy$ , där  $D = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : 0 < x < \sqrt{3}y\}$ .
3. Låt  $N$  vara normallinjen till kurvan  $x^2 + y^2 + kxy = 1$  i punkten  $(1, 0)$ . Bestäm konstanten  $k$  så att linjen  $N$  går genom punkten  $(-2, 2)$ .
4. Visa att ekvationen  $2yz + e^{xz} + \cos(xy) = -4$  implicit definierar en funktion  $y = f(x, z)$  av klass  $\mathcal{C}^1$  nära punkten  $(x, y, z) = (0, -1, 3)$ . Ange  $f(0, 3)$  samt derivatorna  $f'_x(0, 3)$  och  $f'_z(0, 3)$ .
5. Bestäm alla funktioner  $f(x, y, z)$  av klass  $\mathcal{C}^1$  (för  $x > 0$ ) sådana att

$$x f'_x - x f'_y - z f'_z = 0, \quad f(1, y, z) = yz.$$

(Ledning: Använd t.ex. variabelbytet  $u = y$ ,  $v = x + y$ ,  $w = xz$ .)

6. Beräkna  $\iiint_D z dx dy dz$ , där  $D = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : z^2 \leq x \leq y \leq 2z\}$ .

## Lösningsskisser till TATA69 Flervariabelanalys 2017-10-20

1. Derivatorna  $f'_x = 6x + 4y + 2x^2$  och  $f'_y = 2y + 4x$  är noll om och endast om  $(x, y) = (0, 0)$  eller  $(x, y) = (1, -2)$ . Andraderivatorna  $f''_{xx} = 6 + 4x$ ,  $f''_{xy} = 4$  och  $f''_{yy} = 2$  uträknade i dessa punkter ger de kvadratiska formerna

$$Q_{(0,0)}(h, k) = 6h^2 + 8hk + 2k^2 = 2(k + 2h)^2 - 2h^2$$

och

$$Q_{(1,-2)}(h, k) = 10h^2 + 8hk + 2k^2 = 2(k + 2h)^2 + 2h^2.$$

Den första är indefinit, t.ex. är  $Q_{(0,0)}(1, -2) < 0 < Q_{(0,0)}(0, 1)$ , så  $(0, 0)$  är en sadelpunkt. Den andra är positivt definit, eftersom den är uppenbart ickenegativ, och lika med noll bara då  $k + 2h = h = 0$ , dvs. då  $h = k = 0$ ; alltså har  $f$  (strängt) lokalt minimum i  $(1, -2)$ .

**Svar:**  $(1, -2)$  är en lokal minimipunkt.

2. Integralen är generaliserad eftersom området  $D$  är obegränsat, men integranden  $xy/(1 + (x^2 + y^2)^4)$  är positiv i  $D$ , vilket motiverar att vi kan räkna på som vanligt. Byte till polära koordinater ger

$$\begin{aligned} \iint_D \frac{xy}{1 + (x^2 + y^2)^4} dx dy &= \int_{\rho=0}^{\infty} \left( \int_{\varphi=\pi/6}^{\pi/2} \frac{\rho^2 \cos \varphi \sin \varphi}{1 + \rho^8} \rho d\varphi \right) d\rho \\ &= \lim_{\omega \rightarrow \infty} \left[ \frac{1}{4} \arctan(\rho^4) \right]_0^{\omega} \left[ \frac{1}{2} \sin^2 \varphi \right]_{\pi/6}^{\pi/2} \\ &= \frac{1}{4} \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{2} \left( 1^2 - (1/2)^2 \right) = \frac{3\pi}{64}. \end{aligned}$$

**Svar:**  $3\pi/64$ .

3. Sätt  $f(x, y) = x^2 + y^2 + kxy$ , så att kurvan är  $f(x, y) = 1$ . Gradienten

$$\nabla f(x, y) = \begin{pmatrix} 2x + ky \\ 2y + kx \end{pmatrix}$$

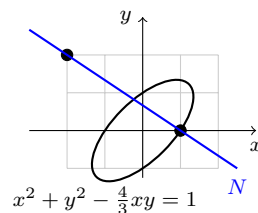
är vinkelrät mot  $f$ 's nivåkurvor, så normallinjen  $N$  i punkten  $(1, 0)$  har riktningsvektor

$$\nabla f(1, 0) = \begin{pmatrix} 2 \\ k \end{pmatrix}.$$

Linjen  $N$  går genom  $(-2, 2)$  om och endast om denna riktningsvektor är parallell med vektorn från  $(1, 0)$  till  $(-2, 2)$ :

$$\begin{pmatrix} 2 \\ k \end{pmatrix} \parallel \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix} \iff k = -\frac{4}{3}.$$

**Svar:**  $k = -4/3$ .



4. Funktionen  $F(x, y, z) = 2yz + e^{xz} + \cos(xy)$  är uppenbart av klass  $\mathcal{C}^1$ , och  $F(0, -1, 3) = -6 + 1 + 1 = -4$ . Vidare är

$$\nabla F(x, y, z) = \begin{pmatrix} z e^{xz} - y \sin(xy) \\ 2z - x \sin(xy) \\ 2y + x e^{xz} \end{pmatrix}, \quad \nabla F(0, -1, 3) = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ -2 \end{pmatrix},$$

alltså i synnerhet  $F'_y(0, -1, 3) = 6 \neq 0$ . Förutsättningarna för implicita funktionsatsen är därmed uppfyllda, vilket visar att sambandet  $F(x, y, z) = -4$  definierar en  $\mathcal{C}^1$ -funktion  $y = f(x, z)$  nära  $(0, -1, 3)$ .

Per definition är  $f(0, 3) = -1$ . Derivatorna fås med implicit derivering:

$$f'_x(0, 3) = -\frac{F'_x(0, -1, 3)}{F'_y(0, -1, 3)} = -\frac{3}{6} = -\frac{1}{2},$$

$$f'_z(0, 3) = -\frac{F'_z(0, -1, 3)}{F'_y(0, -1, 3)} = -\frac{-2}{6} = \frac{1}{3}.$$

**Svar:** Se ovan.

5. Med det föreslagna variabelbytet fås från kedjeregeln att  $f'_x = f'_v + z f'_w$ ,  $f'_y = f'_u + f'_v$  och  $f'_z = x f'_w$ . Insättning i PDE:n ger

$$0 = x(f'_x - f'_y) - z f'_z = x(z f'_w - f'_u) - z x f'_w = -x f'_u,$$

alltså  $f'_u = 0$  (eftersom vi förutsätter  $x > 0$ ). Därmed är  $f(u, v, w) = g(v, w)$ , där  $g$  är en godtycklig  $\mathcal{C}^1$ -funktion av två variabler. I de ursprungliga variablerna fås alltså

$$f(x, y, z) = g(x + y, xz).$$

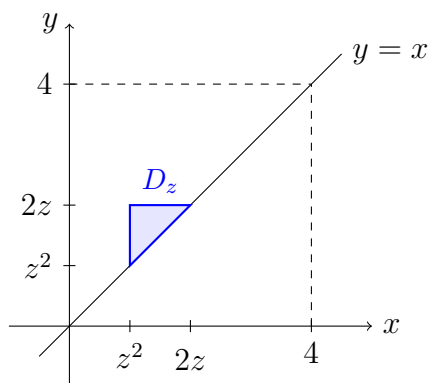
Bivillkoret ger  $yz = f(1, y, z) = g(1 + y, z)$ , så att  $g(s, t) = (s - 1)t$ , och följaktligen  $f(x, y, z) = (x + y - 1)xz$ .

**Svar:**  $f(x, y, z) = (x + y - 1)xz$ .

(Ett litet tips: Det är lätt att kontrollera genom insättning att svaret uppfyller både PDE:n och bivillkoret!)

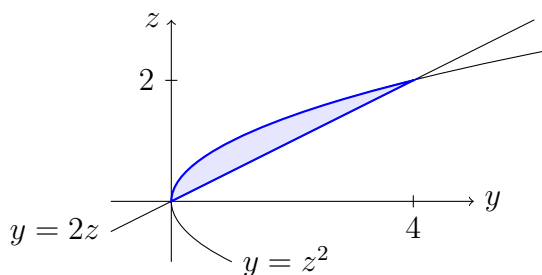
6. Ett enkelt sätt är skivor för fixt  $z$ : om man håller  $z$  konstant i olikheterna  $z^2 \leq x \leq y \leq 2z$  så ser man att tvärsnittet  $D_z$  är en halv kvadrat med sidlängd  $2z - z^2$  (förutsatt att  $z^2 \leq 2z$ , dvs.  $0 \leq z \leq 2$ ), så

$$\begin{aligned} \iiint_D z \, dx \, dy \, dz &= \int_{z=0}^2 \left( \iint_{D_z} z \, dx \, dy \right) dz = \int_{z=0}^2 z \, \text{area}(D_z) \, dz \\ &= \int_{z=0}^2 z \cdot \frac{1}{2}(2z - z^2)^2 \, dz = \frac{8}{15}. \end{aligned}$$



Men det går på flera andra sätt också, t.ex. stavar i  $x$ -led: olikheterna för  $D$  ger direkt gränserna  $z^2 \leq x \leq y$  för den inre  $x$ -integralen, och kroppens projektion  $\tilde{D}$  på  $yz$ -planet ges av  $z^2 \leq y \leq 2z$ , dvs. området mellan kurvan  $y = z^2$  och linjen  $y = 2z$ . Alltså

$$\begin{aligned} \iiint_D z \, dx \, dy \, dz &= \iint_{\tilde{D}} \left( \int_{x=z^2}^y z \, dx \right) dy \, dz = \iint_{\tilde{D}} z(y - z^2) \, dy \, dz \\ &= \int_{z=0}^2 \left( \int_{y=z^2}^{2z} z(y - z^2) \, dy \right) dz = \frac{8}{15}. \end{aligned}$$



**Svar:**  $8/15$ .