

Tentamen i TATA69 Flervariabelanalys

2017-05-29 kl 14–19

Inga hjälpmedel tillåtna (inte heller miniräknare). 8/11/14 poäng med minst 3/4/5 uppgifter med minst 2 poäng (av 3 möjliga) ger betyg 3/4/5. Länk till lösningsskiss finns efter tentamen på kursens hemsida.

1. Ange alla sadelpunkter och alla lokala maximi- och minimipunkter för

$$f(x, y) = 2x + \frac{7}{2}x^2 + 8xy + 4y^2 - \frac{1}{3}x^3.$$

2. Beräkna

$$\iint_D (y - x) \, dx \, dy,$$

där D ges av olikheterna $x \geq 1$, $y \leq 0$ och $(x - 1)^2 + 4y^2 \leq 4$.

3. Visa att ekvationen $x^5 e^{y-2} + xy^2 = 5$ lokalt kring punkten $(x, y) = (1, 2)$ definierar x som en \mathcal{C}^1 -funktion av y , alltså $x = g(y)$, och beräkna $g'(2)$. Ange även tangentlinjen (på normalform $Ax + By = C$) till grafen $x = g(y)$ i punkten $(x, y) = (1, 2)$.
4. Bestäm alla punkter på ytan $x^2 + xy - 2yz + 2z^2 = 6$ sådana att $\mathbf{u} = (0, 1, 1)$ och $\mathbf{v} = (2, 0, 1)$ är tangentvektorer till ytan där. Ange även ytans tangentplan (på normalform $Ax + By + Cz = D$) i dessa punkter.
5. Beräkna volymen av den kropp D i \mathbf{R}^3 som ges av olikheterna $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq x^2$ och $x + y + z \leq 2$.
6. Visa (genom insättning) att varje funktion av formen

$$z(x, y) = f(xy^2) + y g(x), \quad f, g \in \mathcal{C}^2(\mathbf{R})$$

är en lösning till den partiella differentialekvationen

$$y^2 z''_{yy} - 2xy z''_{xy} + 2x z'_x = 0.$$

Bestäm också alla lösningar av ovanstående form (för $x > 0$, $y > 0$) som uppfyller bivillkoren

$$z(x, 1) = 0, \quad z'_y(x, 1) = 3x^2.$$

Lösningsskisser till TATA69 Flervariabelanalys 2017-05-29

1. Stationära punkter ges av

$$\nabla f = \begin{pmatrix} 2 + 7x + 8y - x^2 \\ 8x + 8y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

dvs. $y = -x$ och $2 - x - x^2 = 0$. Ur detta fås att $(x, y) = (1, -1)$ eller $(x, y) = (-2, 2)$. Andraderivatorna är $f''_{xx} = 7 - 2x$, $f''_{xy} = 8$ och $f''_{yy} = 8$, så den kvadratiske formen i Taylorutvecklingen kring respektive punkt är

$$Q_{(1,-1)}(h, k) = (7 - 2)h^2 + 2 \cdot 8hk + 8k^2 = 8(k + h)^2 - 3h^2$$

(indefinit, t.ex. är $Q(1, -1) = -3 < 0$ och $Q(0, 1) = 8 > 0$) och

$$Q_{(-2,2)}(h, k) = (7 + 4)h^2 + 2 \cdot 8hk + 8k^2 = 8(k + h)^2 + 3h^2$$

(positivt definit, ty $Q \geq 0$ alltid, och $Q = 0$ enbart om $k + h = 0$ och $h = 0$, dvs. $(h, k) = (0, 0)$).

Svar: f har sadelpunkt i $(1, -1)$ och (strängt) lokalt minimum i $(-2, 2)$. (Lokala maximipunkter saknas.)

2. Man kan notera redan innan man börjar att svaret måste bli negativt, eftersom integranden $y - x$ är negativ i D ; olikheterna $x \geq 1$ och $y \leq 0$ medför ju att $y - x \leq -1$.

Variabelbytet $u = x - 1$, $v = 2y$ ger ett nytt område E som definieras av $u \geq 0$, $v \leq 0$ och $u^2 + v^2 \leq 2^2$. Planpolära koordinater i uv -planet ger därefter

$$\begin{aligned} \iint_D (y - x) dx dy &= \iint_E \left(\frac{1}{2}v - u - 1\right) \frac{dudv}{2} \\ &= \frac{1}{2} \int_{\varphi=-\pi/2}^0 \left(\int_{\rho=0}^2 \left(\frac{1}{2}\rho \sin \varphi - \rho \cos \varphi - 1\right) \rho d\rho \right) d\varphi \\ &= \frac{1}{2} \int_{\varphi=-\pi/2}^0 \left(\frac{4}{3} \sin \varphi - \frac{8}{3} \cos \varphi - 2\right) d\varphi \\ &= \frac{1}{2} \left(-\frac{4}{3} - \frac{8}{3} - 2 \cdot \frac{\pi}{2}\right). \end{aligned}$$

Svar: $-2 - \frac{\pi}{2}$.

3. Ekvationen är $f(x, y) = 5$ där $f(x, y) = x^5 e^{y-2} + xy^2$, en funktion som uppenbart är av klass \mathcal{C}^1 . Vidare har vi $f(1, 2) = 5$ och

$$\nabla f(x, y) = \begin{pmatrix} 5x^4 e^{y-2} + y^2 \\ x^5 e^{y-2} + 2xy \end{pmatrix} \implies \nabla f(1, 2) = \begin{pmatrix} 5 \cdot 1 \cdot 1 + 2^2 \\ 1 \cdot 1 + 2 \cdot 1 \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 5 \end{pmatrix},$$

och speciellt $f'_x(1, 2) = 9 \neq 0$. Förutsättningarna för implicita funktions-satsen är därmed uppfyllda, och den visar att ekvationens lösning har formen $x = g(y)$ nära $(1, 2)$, för någon \mathcal{C}^1 -funktion g .

Implicit derivering av sambandet $f(g(y), y) = 5$ ger

$$f'_x(g(y), y) \cdot g'(y) + f'_y(g(y), y) = 0,$$

varefter insättning av $y = 2$ och $g(2) = 1$ ger $9 \cdot g'(2) + 5 = 0$, alltså $g'(2) = -5/9$.

Tangentlinjen, slutligen, är $x - 1 = g'(2)(y - 2)$, alltså $9x + 5y = 19$. (Alternativt sätt att tänka: grafen $x = g(y)$ utgör en del av nivåkurvan $f = 5$, så tangentlinjens normalvektor ges av nivåkurvans normalvektor $\nabla f(1, 2) = \begin{pmatrix} 9 \\ 5 \end{pmatrix}$.)

Svar: $g'(2) = -5/9$, tangentlinjen är $9x + 5y = 19$.

4. Låt $f(x, y, z) = x^2 + xy - 2yz + 2z^2$, så att ytans ekvation är $f(x, y, z) = 6$. De sökta tangeringspunkterna (a, b, c) ska såklart ligga på ytan, och om \mathbf{u} och \mathbf{v} ska vara tangentvektorer så måste ytans normalvektor $\nabla f(a, b, c)$ vara vinkelrät mot dem, vilket ger villkoren

$$f(a, b, c) = 6, \quad \nabla f(a, b, c) \cdot \mathbf{u} = 0, \quad \nabla f(a, b, c) \cdot \mathbf{v} = 0.$$

De två sistnämnda villkoren blir i utskriven form

$$\begin{pmatrix} 2a + b \\ a - 2c \\ -2b + 4c \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = a - 2b + 2c = 0, \quad \begin{pmatrix} 2a + b \\ a - 2c \\ -2b + 4c \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 4a + 4c = 0,$$

ett linjärt system med parameterlösning $(a, b, c) = (-2t, t, 2t)$, $t \in \mathbf{R}$. Insättning av detta i $f(a, b, c) = 6$ ger

$$(-2t)^2 + (-2t)t - 2t(2t) + 2(2t)^2 = 6,$$

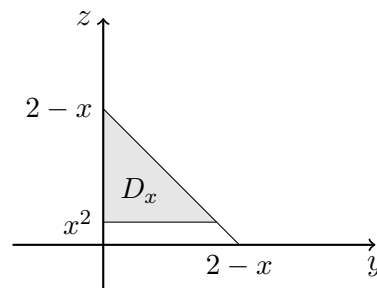
dvs. $6t^2 = 6$, dvs. $t = \pm 1$. Detta ger att de sökta punkterna är $(a, b, c) = \pm(-2, 1, 2)$. Tangentplanets normalvektor är

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

så tangentplanen är $x + 2y - 2z = D$, där D fås genom att sätta in punkterna ifråga. (Normalen kan förstås även beräknas som $\nabla f(a, b, c)$.)

Svar: Punkterna är $(-2, 1, 2)$ och $(2, -1, -2)$, och tangentplanen där är $x + 2y - 2z = -4$ resp. $x + 2y - 2z = 4$.

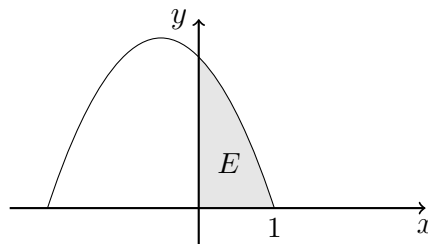
5. Det finns många sätt att beräkna D 's volym. Det enklaste är antagligen att använda tvärsnitt D_x för fixt x . Det är uppenbart att $x \in [0, 2]$ till att börja med. Med x fixerat så blir villkoren för y och z att $y \geq 0$, $z \geq 0$, $y + z \leq 2 - x$ (vilket ger en halv kvadrat i yz -planet med sidlängd $2 - x$) samt $z \geq x^2$ (vilket skär bort nederdelen och ger en lite mindre triangel, med sidlängd $(2 - x) - x^2$):



För att det verkligen ska bli en triangel (och inte tomma mängden) måste vi ha $x^2 \leq 2 - x \iff (x + 2)(x - 1) \leq 0$, så vi kan inte ta med hela intervallet $x \in [0, 2]$, utan bara $x \in [0, 1]$. Detta ger

$$\begin{aligned} \text{Volym}(D) &= \iiint_D dx dy dz = \int_{x=0}^1 \text{Area}(D_x) dx \\ &= \int_{x=0}^1 \frac{1}{2} \left((2 - x) - x^2 \right)^2 dx = \frac{17}{20}. \end{aligned}$$

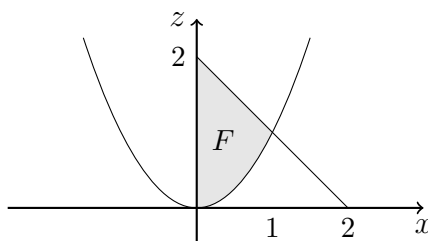
Ett alternativ är att använda stavar i z -led; då får man $x^2 \leq z \leq 2 - x - y$, över det område E i xy -planet som definieras av $x \geq 0$, $y \geq 0$ och $x^2 \leq 2 - x - y$ (dvs. $y \leq 2 - x - x^2 = -(x - 1)(x + 2)$):



På detta sätt fås

$$\begin{aligned}\iiint_D dx dy dz &= \iint_E \left(\int_{z=x^2}^{2-x-y} dz \right) dx dy \\ &= \int_{x=0}^1 \left(\int_{y=0}^{2-x-x^2} (2-x-y-x^2) dy \right) dx = \frac{17}{20}.\end{aligned}$$

Ännu ett lättframkomligt sätt är stavas i y -led, $0 \leq y \leq 2-x-z$, över det område F i xz -planet som ges av $x \geq 0$, $z \geq x^2$ och $0 \leq 2-x-z$:



Detta leder till

$$\begin{aligned}\iiint_D dx dy dz &= \iint_F \left(\int_{y=0}^{2-x-z} dy \right) dx dz \\ &= \int_{x=0}^1 \left(\int_{z=x^2}^{2-x} (2-x-z) dz \right) dx = \frac{17}{20}.\end{aligned}$$

Svar: Volymen är $17/20$.

6. Derivering av $z(x, y) = f(xy^2) + y g(x)$ med kedjeregeln ger

$$\begin{aligned}z'_x(x, y) &= f'(xy^2) \cdot y^2 + y g'(x), \\ z'_y(x, y) &= f'(xy^2) \cdot 2xy + g(x), \\ z''_{xy}(x, y) &= f''(xy^2) \cdot 2xy \cdot y^2 + f'(xy^2) \cdot 2y + g'(x), \\ z''_{yy}(x, y) &= f''(xy^2) \cdot 2xy \cdot 2xy + f'(xy^2) \cdot 2x.\end{aligned}$$

Vid insättning av detta i differentialekvationens vänsterled tar alla termerna ut varandra, så det blir noll kvar, vilket skulle visas.

Angående bivillkoren ger insättning av $y = 1$ att

$$\begin{aligned}0 &= z(x, 1) = f(x) + g(x), \\ 3x^2 &= z'_y(x, 1) = f'(x) \cdot 2x + g(x),\end{aligned}$$

vilket medför att $2x f'(x) - f(x) = 3x^2$, alltså

$$f'(x) - \frac{1}{2x} f(x) = \frac{3}{2}x.$$

Efter multiplikation med den integrerande faktorn $\exp(\int \frac{-1}{2x} dx) = x^{-1/2}$ fås $(x^{-1/2} f(x))' = \frac{3}{2}x^{1/2}$, så att $x^{-1/2} f(x) = x^{3/2} + C$. Alltså har vi $f(x) = x^2 + C\sqrt{x}$ (för $x > 0$), och då blir $g(x) = -f(x) = -x^2 - C\sqrt{x}$, vilket ger svaret

$$z(x, y) = f(xy^2) + y g(x) = (xy^2)^2 + C\sqrt{xy^2} - y(x^2 + C\sqrt{x}) = x^2(y^4 - y)$$

(eftersom $\sqrt{y^2} = y$ om $y > 0$).

Svar: Se ovan.