

Tentamen i TATA69 Flervariabelanalys

2016-08-18 kl 14–19

Inga hjälpmedel tillåtna (inte heller miniräknare). 8/11/14 poäng med minst 3/4/5 uppgifter med minst 2 poäng (av 3 möjliga) ger betyg 3/4/5. Länk till lösningsskiss finns efter tentamen på kursens hemsida.

1. Bestäm alla \mathcal{C}^1 -lösningar $z(x, y)$ till differentialekvationen

$$xz'_x - z'_y = xe^y, \quad (x, y) \in \mathbf{R}^2,$$

under bivillkoret $z(x, 1) = x^2$, t.ex. genom att göra variabelbytet

$$u = xe^y, \quad v = y.$$

2. Beräkna

$$\iint_D y \, dx dy,$$

där

$$D = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : -1 \leq x + y \leq x - 2y \leq 2\}.$$

3. Beräkna

$$\iiint_D x \, dx dy dz,$$

där

$$D = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1 \text{ och } x \leq 0\}.$$

4. Låt

$$f(x, y, z) = x^3 + 3x^2 + 4y^2 + 6z^2 - 6xy - 6xz + 8yz + 4z.$$

Är $(0, 0, 0)$ en lokal extrempunkt för f ? Är $(0, 1, -1)$ det? Ange i så fall även om det är lokalt maximum eller lokalt minimum.

5. Bestäm för vilka värden på konstanten C som $x + 3y + z = C$ är ett tangentplan till ytan $x^4 + 32y^3z = 48$.

6. Låt $f(x, y) = \frac{x^2 + xy + y^3}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ för $(x, y) \neq (0, 0)$.

- (a) Bestäm $f(0, 0)$ så att f blir kontinuerlig i punkten $(0, 0)$.
- (b) Avgör om $f'_x(0, 0)$ och $f'_y(0, 0)$ existerar.
- (c) För vilka vektorer \mathbf{v} (med $|\mathbf{v}| = 1$) existerar $f'_{\mathbf{v}}(0, 0)$?

Lösningsskisser till TATA69 Flervariabelanalys 2016-08-18

1. Kedjeregeln ger $z'_x = z'_u u'_x + z'_v v'_x = e^y z'_u$ och $z'_y = z'_u u'_y + z'_v v'_y = x e^y z'_u + z'_v$, och insättning i differentialekvationen ger $-z'_v = x e^y$, d.v.s. $z'_v = -u$. Integration ger $z(u, v) = -uv + g(u)$, där g är en \mathcal{C}^1 -funktion av en variabel, alltså $z(x, y) = -x y e^y + g(x e^y)$. Bivillkoret ger sedan $x^2 = z(x, 1) = -ex + g(ex)$, så $g(t) = t + (t/e)^2$. Alltså är $z(x, y) = -x y e^y + x e^y + (x e^y/e)^2 = x^2 e^{2y-2} - (y-1)x e^y$.

Svar: $z(x, y) = x^2 e^{2y-2} - (y-1)x e^y$.

2. Det linjära variabelbytet

$$\begin{cases} u = x + y, \\ v = x - 2y, \end{cases} \quad \frac{d(u, v)}{d(x, y)} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -3, \quad dudv = |-3| dx dy = 3 dx dy,$$

ger nytt område $E : -1 \leq u \leq v \leq 2$. Med upprepad integration fås

$$\begin{aligned} \iint_D y \, dx dy &= \iint_E \frac{u-v}{3} \frac{dudv}{3} = \frac{1}{9} \int_{-1}^2 \left(\int_u^2 (u-v) \, dv \right) du \\ &= \frac{1}{9} \int_{-1}^2 \left[-\frac{(u-v)^2}{2} \right]_{v=u}^{v=2} du = -\frac{1}{18} \int_{-1}^2 (u-2)^2 du \\ &= -\frac{1}{18} \left[\frac{(u-2)^3}{3} \right]_{-1}^2 = -\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Svar: $-1/2$.

Alternativ: Integrera direkt i xy -planet; området är en triangel med hörn $(-1, 0)$, $(0, -1)$, $(2, 0)$.

3. Man kan notera direkt att svaret måste bli negativt. Vid byte till rymdpolära koordinater fås ett nytt område E som ges av $0 \leq r \leq 1$, $\pi/2 \leq \varphi \leq 3\pi/2$ och $0 \leq \theta \leq \pi$, alltså

$$\begin{aligned} \iiint_D x \, dx dy dz &= \iiint_E r \cos \varphi \sin \theta \cdot r^2 \sin \theta \, dr d\theta d\varphi \\ &= \left(\int_0^1 r^3 \, dr \right) \left(\int_0^\pi \sin^2 \theta \, d\theta \right) \left(\int_{\pi/2}^{3\pi/2} \cos \varphi \, d\varphi \right) \\ &= \frac{1}{4} \cdot \frac{\pi}{2} \cdot (-2) = -\frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

Svar: $-\pi/4$.

Alternativ: För att få lite bekvämare räkningar i rymdpolära koordinater kan man först sätta $(x, y, z) = (-w, u, v)$, vilket ger en integral över området $F = \{u^2 + v^2 + w^2 \leq 1, w \geq 0\}$ istället:

$$\iiint_D x \, dx dy dz = \iiint_F (-w) \, dudv dw = - \left(\int_0^1 r^3 \, dr \right) \left(\int_0^{\pi/2} \sin \theta \cos \theta \, d\theta \right) \left(\int_0^{2\pi} d\varphi \right).$$

4. Stationära punkter för f bestäms av att $\nabla f = \mathbf{0}$, där

$$\nabla f = (f'_x, f'_y, f'_z) = (3x^2 + 6x - 6y - 6z, 8y - 6x + 8z, 12z - 6x + 8y + 4).$$

Eftersom $\nabla f(0, 0, 0) = (0, 0, 4)$ så är punkten $(0, 0, 0)$ inte en stationär punkt, och därmed inte heller en lokal extrempunkt för f .

Däremot är $\nabla f(0, 1, -1) = (0, 0, 0)$, så punkten $(0, 1, -1)$ är stationär och undersöks vidare. I denna punkt blir andraderivatorna $f''_{xx} = 6x + 6 = 6$, $f''_{xy} = -6$, $f''_{xz} = -6$, $f''_{yy} = 8$, $f''_{yz} = 8$ och $f''_{zz} = 12$, så vi får den kvadratiske formen

$$\begin{aligned} Q(h, k, l) &= (h \quad k \quad l) \begin{pmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} & f''_{xz} \\ f''_{xy} & f''_{yy} & f''_{yz} \\ f''_{xz} & f''_{yz} & f''_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h \\ k \\ l \end{pmatrix} \\ &= (h \quad k \quad l) \begin{pmatrix} 6 & -6 & -6 \\ -6 & 8 & 8 \\ -6 & 8 & 12 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h \\ k \\ l \end{pmatrix} \\ &= 6h^2 + 8k^2 + 12l^2 - 12hk - 12hl + 16kl \\ &= 6(h - k - l)^2 + 2(k + l)^2 + 4l^2, \end{aligned}$$

som är positivt definit eftersom $Q(h, k, l) \geq 0$ för alla (h, k, l) , och $Q(h, k, l) = 0$ endast om $h - k - l = 0$, $k + l = 0$ och $l = 0$, d.v.s. endast om $(h, k, l) = (0, 0, 0)$. Alltså är $(0, 1, -1)$ en lokal minimipunkt för f .

Svar: $(0, 0, 0)$ är inte en lokal extrempunkt för f , men $(0, 1, -1)$ är en lokal minimipunkt för f .

5. Sätt $F(x, y, z) = x^4 + 32y^3z$; då är den givna ytan nivåytan $F(x, y, z) = 48$. Tangentplanet till denna yta i en punkt (a, b, c) på ytan är planet $x + 3y + z = C$ precis då $\nabla F(a, b, c) \parallel (1, 3, 1)$, $F(a, b, c) = 48$ och $a + 3b + c = C$, d.v.s. precis då

$$(4a^3, 96b^2c, 32b^3) \parallel (1, 3, 1), \quad a^4 + 32b^3c = 48 \quad \text{och} \quad a + 3b + c = C.$$

Det första villkoret ger ekvationerna $a^3 = 8b^3$ (d.v.s. $a = 2b$, ty $a, b \in \mathbf{R}$) och $b^2c = b^3$, av vilka den senare ger $b = 0$ eller $b = c$. Fallet $b = 0$ ger $a = 0$, men $F(0, 0, c) = 0 \neq 48$. Återstår fallet $b = c$. Insättning i $F = 48$ ger $48 = F(2b, b, b) = 48b^4$, d.v.s. $b = \pm 1$ (ty $b \in \mathbf{R}$), och därmed tangeringspunkterna $(2, 1, 1)$ och $(-2, -1, -1)$, med tillhörande $C = 6$ respektive $C = -6$.

Svar: $C = \pm 6$.

6. (a) Med planpolära koordinater $x = \rho \cos \varphi$, $y = \rho \sin \varphi$ får vi

$$\begin{aligned} f(x, y) &= \frac{\rho^2 \cos^2 \varphi + \rho^2 \cos \varphi \sin \varphi + \rho^3 \sin^3 \varphi}{\rho} \\ &= \rho(\cos^2 \varphi + \cos \varphi \sin \varphi + \rho \sin^3 \varphi), \end{aligned}$$

så $|f(x, y) - 0| \leq \rho(1 + 1 + \rho) \rightarrow 0$ när $\rho \rightarrow 0$ och φ varierar fritt, d.v.s. $f(x, y) \rightarrow 0$ när $(x, y) \rightarrow (0, 0)$. Sätt därför $f(0, 0) = 0$ för att få kontinuitet i origo.

Svar: $f(0, 0) = 0$.

- (b)

$$\frac{f(h, 0) - f(0, 0)}{h} = \frac{h^2/|h| - 0}{h} = \frac{h}{|h|} = \begin{cases} 1, & h > 0, \\ -1, & h < 0, \end{cases}$$

så gränsvärdet när $h \rightarrow 0$, d.v.s. $f'_x(0, 0)$, existerar ej. Vidare,

$$\frac{f(0, k) - f(0, 0)}{k} = \frac{k^3/|k| - 0}{k} = \frac{k^2}{|k|} = |k| \rightarrow 0 \quad \text{när } k \rightarrow 0,$$

så $f'_y(0, 0) = 0$.

Svar: $f'_x(0, 0)$ existerar ej, men $f'_y(0, 0)$ existerar (= 0).

- (c) Låt $\mathbf{v} = (a, b)$ med $a^2 + b^2 = 1$. Då blir

$$\frac{f(ta, tb) - f(0, 0)}{t} = \frac{(ta)^2 + ta \cdot tb + (tb)^3 - 0}{|t|} = (a^2 + ab) \frac{t}{|t|} + b^3 |t|$$

som har gränsvärde när $t \rightarrow 0$ precis då $a^2 + ab = 0$, d.v.s. precis då $a = 0$ eller $a + b = 0$; gränsvärdet är då definitionsmässigt riktningsderivatan $f'_v(0, 0)$. Motsvarande vektorer \mathbf{v} med längd 1 är $\pm(0, 1)$ respektive $\pm(1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2})$.

Svar: $f'_v(0, 0)$ existerar när $\mathbf{v} = (0, 1)$, $(0, -1)$, $(1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2})$ eller $(-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$.