

Tentamen i TATA69 Flervariabelanalys

2016-06-02 kl 14–19

Inga hjälpmedel tillåtna (inte heller miniräknare).

8/11/14 poäng med minst 3/4/5 uppgifter med minst 2 poäng (av 3 möjliga) ger betyg 3/4/5.

Länk till lösningsskiss finns efter tentamen på kursens hemsida.

1. Bestäm alla funktioner $f(x, y, z)$ sådana att

$$\begin{cases} f'_x = z^2 e^z + y^2 z e^x \sin y \\ f'_y = y^2 z e^x \cos y + e^z \sin y + 2y z e^x \sin y \\ f'_z = (z + 2)x z e^z + y^2 e^x \sin y + \cos z - e^z \cos y \end{cases}$$

och $f(1, 0, 0) = 0$.

2. Beräkna

$$\iint_D x^2 dx dy$$

där D ges av olikheterna $3x^2 + y^2 \leq 2$, $y \leq x$ och $x \geq 0$.

3. Bestäm samtliga lokala maximi- och minimipunkter till

$$f(x, y) = x^2 y + 3x^2 + 2xy + y^2.$$

4. Beräkna tyngdpunktens z -koordinat z_T för den homogena (konstant massdensitet) kropp D som ges av $x + y^2 + z \leq 1$, $x \geq 0$ och $z \geq 0$.

Kom ihåg: $z_T = \frac{1}{V} \iiint_D z dx dy dz$, där V är volymen av D .

5. Bestäm alla \mathcal{C}^2 -lösningar $z(x, y)$ till differentialekvationen

$$4y^2 z''_{xx} - 4y z''_{xy} + z''_{yy} - 2z'_x = 6y, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2,$$

under bivillkoren $z(x, 0) = x^2$ och $z'_y(x, 0) = \sin x$, genom att t.ex. göra variabelbytet $u = x + y^2$, $v = y$.

6. Visa att ekvationssystemet

$$\begin{cases} xyz + e^{2x+y+z-2} = 1 \\ xy + xz + yz = 1 \end{cases}$$

implicit definierar \mathcal{C}^1 -funktioner $x(y)$ och $z(y)$ i en omgivning till punkten $(0, 1, 1)$. Bestäm $x'(1)$ och $z'(1)$. Har någon av $x(y)$ eller $z(y)$ lokalt maximum eller minimum i $y = 1$?

Lösningsskisser till TATA69 Flervariabelanalys 2016-06-02

1. Integrering av ekvation 1 ger $f(x, y, z) = xz^2e^z + y^2ze^x \sin y + g(y, z)$, som insatt i ekvation 2 ger $g'_y(y, z) = e^z \sin y$, som integrerat blir $g(y, z) = -e^z \cos y + h(z)$. Insättning i ekvation 3 ger sedan $h'(z) = \cos z$, d.v.s. $h(z) = \sin z + C$. Vi får $f(x, y, z) = xz^2e^z + y^2ze^x \sin y - e^z \cos y + \sin z + C$, och kravet $f(1, 0, 0) = 0$ ger $C = 1$.

Svar: $f(x, y, z) = xz^2e^z + y^2ze^x \sin y - e^z \cos y + \sin z + 1$.

2. Vi gör först ett linjärt byte $u = x\sqrt{3}$, $v = y$ som överför D till en ny mängd $E : u^2 + v^2 \leq 2$, $v \leq u/\sqrt{3}$, $u \geq 0$ (en cirkelsektor, rita figur!) och ger $dx dy = dudv/\sqrt{3}$, och sedan gör vi det vanliga planpolära bytet $u = \rho \cos \varphi$, $v = \rho \sin \varphi$ med ny mängd $F : 0 \leq \rho \leq \sqrt{2}$, $-\pi/2 \leq \varphi \leq \pi/6$ och $dudv = \rho d\rho d\varphi$, och får

$$\begin{aligned} \iint_D x^2 dx dy &= \iint_E \left(\frac{u}{\sqrt{3}}\right)^2 \frac{dudv}{\sqrt{3}} = \frac{1}{3\sqrt{3}} \iint_F (\rho \cos \varphi)^2 \rho d\rho d\varphi \\ &= \frac{1}{3\sqrt{3}} \iint_F \frac{1 + \cos 2\varphi}{2} \rho^3 d\rho d\varphi \\ &= \frac{1}{3\sqrt{3}} \left[\frac{\varphi}{2} + \frac{\sin 2\varphi}{4} \right]_{-\pi/2}^{\pi/6} \cdot \left[\frac{\rho^4}{4} \right]_0^{\sqrt{2}} \\ &= \frac{1}{3\sqrt{3}} \left(\frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{8} \right) \cdot 1 = \frac{\pi\sqrt{3}}{27} + \frac{1}{24}. \end{aligned}$$

3. De stationära punkterna fås ur $f'_x = 2xy + 6x + 2y = 0$ och $f'_y = x^2 + 2x + 2y = 0$. Ur den andra ekvationen får vi $2y = -x^2 - 2x$, som insatt i den första ger $x(4 - 3x - x^2) = 0$, d.v.s. $x = 0$, $x = 1$ eller $x = -4$, och därmed tre stationära punkter: $(0, 0)$, $(1, -3/2)$ och $(-4, -4)$.

Andraderivatorna blir $f''_{xx} = 2y + 6$, $f''_{xy} = 2x + 2$ och $f''_{yy} = 2$.

I $(0, 0)$ blir $f''_{xx} = 6$, $f''_{xy} = 2$ och $f''_{yy} = 2$, och den kvadratiske formen

$$\begin{aligned} Q(h, k) &= \begin{pmatrix} h & k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} \\ f''_{xy} & f''_{yy} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h & k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} \\ &= 6h^2 + 4hk + 2k^2 = 2(k+h)^2 + 4h^2, \end{aligned}$$

som är positivt definit eftersom $Q(h, k) \geq 0$ för alla (h, k) och $Q(h, k) = 0$ endast om $k + h = 0$ och $h = 0$, d.v.s. endast om $(h, k) = (0, 0)$. Således är punkten $(0, 0)$ en lokal minimipunkt för f .

I $(1, -3/2)$ blir $f''_{xx} = 3$, $f''_{xy} = 4$ och $f''_{yy} = 2$, och vi får den kvadratiske formen

$$Q(h, k) = 3h^2 + 8hk + 2k^2 = 2(k + 2h)^2 - 5h^2,$$

som är indefinit eftersom t.ex. $Q(0, 1) = 2 > 0$ medan $Q(-1, 2) = -5 < 0$, så punkten $(1, -3/2)$ är ingen lokal extrempunkt för f .

I $(-4, -4)$, slutligen, blir $f''_{xx} = -2$, $f''_{xy} = -6$ och $f''_{yy} = 2$, och

$$Q(h, k) = -2h^2 - 12hk + 2k^2,$$

som vi direkt ser är indefinit eftersom koefficienterna för h^2 och k^2 har olika tecken (explicit får vi $Q(1, 0) = -2 < 0$ och $Q(0, 1) = 2 > 0$), så punkten $(-4, -4)$ är ingen lokal extrempunkt för f .

Svar: $(0, 0)$ är en lokal minimipunkt. Lokala maximipunkter saknas.

4. Med stavar i z -led kan kroppen D skrivas

$$D = \{(x, y, z) : (x, y) \in \tilde{D}, 0 \leq z \leq 1 - x - y^2\},$$

där projektionen \tilde{D} av D på xy -planet ges av $x + y^2 \leq 1$, $x \geq 0$; alltså kan \tilde{D} skrivas (rita figur!)

$$\tilde{D} = \{(x, y) : -1 \leq y \leq 1, 0 \leq x \leq 1 - y^2\},$$

och vi får

$$\begin{aligned} V &= \iiint_D dx dy dz = \iint_{\tilde{D}} (1 - x - y^2) dx dy \\ &= \int_{-1}^1 \left(\int_0^{1-y^2} (1 - x - y^2) dx \right) dy \\ &= \int_{-1}^1 \left[\frac{(1 - x - y^2)^2}{-2} \right]_{x=0}^{x=1-y^2} dy = \int_{-1}^1 \frac{(1 - y^2)^2}{2} dy \\ &= \frac{1}{2} \left[y - \frac{2y^3}{3} + \frac{y^5}{5} \right]_{-1}^1 = \frac{8}{15} \end{aligned}$$

och, med samma integrationsordning som ovan,

$$\begin{aligned} \iiint_D z dx dy dz &= \iint_{\tilde{D}} \left[\frac{z^2}{2} \right]_{z=0}^{z=1-x-y^2} dx dy = \iint_{\tilde{D}} \frac{(1 - x - y^2)^2}{2} dx dy \\ &= \int_{-1}^1 \frac{(1 - y^2)^3}{6} dy \\ &= \frac{1}{6} \left[y - y^3 + \frac{3y^5}{5} - \frac{y^7}{7} \right]_{-1}^1 = \frac{16}{105}, \end{aligned}$$

så $z_T = (16/105)/(8/15) = 2/7$.

Svar: $z_T = 2/7$.

5. Variabelbytet $u = x + y^2$ och $v = y$ ger $z'_x = z'_u$ och $z'_y = 2yz'_u + z'_v$. Vidare,

$$\begin{aligned} z''_{xx} &= (z'_x)'_x = (z'_u)'_x = z''_{uu}, \\ z''_{xy} &= (z'_x)'_y = (z'_u)'_y = 2yz''_{uu} + z''_{uv}, \\ z''_{yy} &= (z'_y)'_y = (2yz'_u + z'_v)'_y = 2z'_u + 2y(z'_u)'_y + (z'_v)'_y \\ &= 4y^2 z''_{uu} + 4yz''_{uv} + z''_{vv} + 2z'_u. \end{aligned}$$

Insättning i differentialekvationen ger efter förenkling $z''_{vv} = 6v$, och integreringar m.a.p. v ger först $z'_v = 3v^2 + f(u)$ och sedan $z = v^3 + vf(u) + g(u)$, där f och g är \mathcal{C}^2 -funktioner av en variabel.

Differentialekvationens allmänna lösning är således $z(x, y) = y^3 + yf(x + y^2) + g(x + y^2)$.

Första bivillkoret ger nu $x^2 = z(x, 0) = g(x)$, d.v.s. $g(t) = t^2$, varför $z(x, y) = y^3 + yf(x + y^2) + (x + y^2)^2$, och eftersom $z'_y(x, y) = 3y^2 + f(x + y^2) + yf'(x + y^2) \cdot 2y + 2(x + y^2) \cdot 2y$ ger det andra bivillkoret $\sin x = z'_y(x, 0) = f(x)$, d.v.s. $f(t) = \sin t$.

Svar: $z(x, y) = y^3 + y \sin(x + y^2) + (x + y^2)^2$.

6. Låt för korthets skull $h(x, y, z) = e^{2x+y+z-2}$; då är $h(0, 1, 1) = 1$, $h'_x = 2h$ och $h'_y = h = h'_z$. Sätt $F(x, y, z) = xyz + h$ och $G(x, y, z) = xy + xz + yz$. Vi ser att $F, G \in \mathcal{C}^1$ samt att $F(0, 1, 1) = 1$ och $G(0, 1, 1) = 1$. Vidare,

$$\frac{\partial(F, G)}{\partial(x, z)} = \begin{pmatrix} yz + 2h & xy + h \\ y + z & x + y \end{pmatrix} = \left[\text{i punkten } (0, 1, 1) \right] = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix},$$

med determinant $= 1 \neq 0$. Enligt implicita funktionsatsen definierar därför ekvationssystemet $F(x, y, z) = 1$, $G(x, y, z) = 1$ i någon omgivning till $(0, 1, 1)$ \mathcal{C}^1 -funktioner $x(y)$, $z(y)$; notera att, trivialt, $x(1) = 0$ och $z(1) = 1$. Implicit derivering av $F(x(y), y, z(y)) = 1$ och $G(x(y), y, z(y)) = 1$ i en omgivning till $y = 1$ ger ekvationssystemet

$$\begin{cases} (yz + 2h)x'(y) + (xz + h) + (xy + h)z'(y) = 0, \\ (y + z)x'(y) + (x + z) + (x + y)z'(y) = 0. \end{cases}$$

För $y = 1$ fås $\begin{cases} 3x'(1) + 1 + z'(1) = 0, \\ 2x'(1) + 1 + z'(1) = 0; \end{cases}$ alltså $x'(1) = 0$, $z'(1) = -1$.

Eftersom $z'(1) \neq 0$ har funktionen $z(y)$ inget lokalt extremvärde i $y = 1$. Däremot är $x'(1) = 0$, så funktionen $x(y)$ har *eventuellt* lokalt extremvärde i $y = 1$. Vi kan lösa ut $x'(y)$ och $z'(y)$ ur systemet ovan och ser då att de är \mathcal{C}^1 -funktioner, d.v.s. att $x(y)$ och $z(y)$ är \mathcal{C}^2 -funktioner. Vi får därför derivera systemet implicit m.a.p. y , och direkt insättning av $y = 1$ i dessa derivator ger nu (om vi skriver $\tilde{h}(y) = h(x(y), y, z(y))$; notera att $\tilde{h}(1) = 1$ och $\tilde{h}'(1) = \tilde{h}(1) \cdot (2x'(1) + 1 + z'(1)) = 0$) ekvationssystemet

$$\begin{cases} 3x''(1) + z''(1) = 0, \\ 2x''(1) - 2 + z''(1) = 0, \end{cases}$$

varför $x''(1) = -2 < 0$ (och $z''(1) = 6$); således har $x(y)$ lokalt maximum i $y = 1$.

Svar: $x'(1) = 0$, $z'(1) = -1$; $x(y)$ har lokalt maximum och $z(y)$ saknar lokalt extremvärde i $y = 1$.