

Tentamen i TATA69 Flervariabelanalys

2016-01-07 kl. 8–13

Inga hjälpmedel tillåtna (inte heller miniräknare). 8/11/14 poäng med minst 3/4/5 uppgifter med minst 2 poäng (av 3 möjliga) ger betyg 3/4/5. Länk till lösningsskiss finns efter tentamen på kursens hemsida.

1. Bestäm alla \mathcal{C}^1 -funktioner $f(x, y)$ som uppfyller differentialekvationen

$$x f'_x + 2y f'_y = x^2 \quad (x > 0, y > 0)$$

med bivillkoret $f(x, 1) = x^2$. (Använd t.ex. variabelbytet $u = x, v = x^2/y$.)

2. Beräkna $\iiint_D xz \, dx dy dz$, där

$$D = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : z \geq 0, x^2 + y^2 + z^2 \leq 3, x + y \leq 0\}.$$

3. Bestäm alla lokala maximi- och minimipunkter till funktionen

$$f(x, y, z) = 2z - 3x^2 - y^2 - z^2 + 2xy - 2xz.$$

4. Bestäm alla tangentplan till ytan $x^2 + y^2 - z^2 = 1$ som innehåller punkterna $(3, 2, 2)$ och $(5, 3, 3)$.
5. Låt D vara det obegränsade område i \mathbf{R}^2 som beskrivs av olikheterna $x \geq 2, y \geq 0$ och $xy \leq 2$. Beräkna värdet hos den generaliserade integralen

$$\iint_D (xy - 1) \, dx dy$$

om den är konvergent, annars visa att den är divergent.

6. Låt $f(x, y)$ vara en \mathcal{C}^1 -funktion av två variabler.

- (a) Ange det gränsvärde som definierar riktningsderivatan $f'_{\mathbf{v}}(a, b)$, där $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$ är en enhetsvektor och (a, b) är en inre punkt i f 's definitionsmängd.
- (b) Härled formeln som uttrycker $f'_{\mathbf{v}}(a, b)$ i termer av $\nabla f(a, b)$.
- (c) Om $f'_{(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})}(a, b) = \sqrt{18}$ och $f'_{(-2/\sqrt{5}, 1/\sqrt{5})}(a, b) = -\sqrt{45}$, för vilken enhetsvektor $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$ är $f'_{\mathbf{v}}(a, b)$ som störst, och vad är detta största värde?

Lösningsskisser till TATA69 Flervariabelanalys 2016-01-07

1. Med det föreslagna variabelbytet fås

$$x f'_x + 2y f'_y = x (f'_u + \frac{2x}{y} f'_v) + 2y (-\frac{x^2}{y^2} f'_v) = x f'_u,$$

så PDE:n övergår i $x f'_u = x^2$, dvs. $f'_u = u$. Den allmänna lösningen är alltså $f = u^2/2 + g(v) = x^2/2 + g(x^2/y)$, där g är en godtycklig C^1 -funktion av en variabel. Bivillkoret $f(x, 1) = x^2$ ger $x^2/2 + g(x^2) = x^2$, alltså $t/2 + g(t) = t$, alltså $g(t) = t/2$.

Svar: $f(x, y) = \frac{x^2}{2} + \frac{x^2}{2y}$.

2. Byte till rymdpolära koordinater ger ett nytt område E , som beskrivs av $0 \leq r \leq \sqrt{3}$, $0 \leq \theta \leq \pi/2$ och (t.ex.) $-5\pi/4 \leq \varphi \leq -\pi/4$. Integralen blir därmed

$$\begin{aligned} \iiint_D xz \, dx dy dz &= \iiint_E r \cos \varphi \sin \theta \cdot r \cos \theta \cdot r^2 \sin \theta \, dr d\theta d\varphi \\ &= \left[\frac{r^5}{5} \right]_{r=0}^{\sqrt{3}} \left[\frac{\sin^3 \theta}{3} \right]_{\theta=0}^{\pi/2} \left[\sin \varphi \right]_{\varphi=-5\pi/4}^{-\pi/4} \\ &= \frac{9\sqrt{3}}{5} \cdot \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{-1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} \right) = -\frac{3\sqrt{6}}{5}. \end{aligned}$$

Svar: $-3\sqrt{6}/5$.

3. Stationära punkter fås ur villkoret $\nabla f(x, y, z) = \mathbf{0}$; detta ger ett linjärt ekvationssystem med den enda lösningen $(x, y, z) = (-1, -1, 2)$. På vanligt sätt finner vi $f(-1 + h, -1 + k, 2 + l) = 2 + Q(h, k, l)$, där

$$Q(h, k, l) = -(3h^2 + k^2 + l^2 - 2hk + 2hl) = -(k - h)^2 - (l + h)^2 - h^2.$$

(Resttermen i Taylorutvecklingen är faktiskt noll i detta fall; funktionen f själv innehåller ju inga termer av grad högre än två.) Det är uppenbart att $Q \leq 0$ alltid, och $Q = 0$ bara om $k - h = l + h = h = 0$, dvs. om $h = k = l = 0$. Därmed är Q negativt definit, och $f(-1, -1, 2) = 2$ är ett strängt lokalt maximum.

Svar: $(-1, -1, 2)$ är en lokal maximipunkt.

4. Sätt $f(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2$. Tangentplanet till nivåytan $f = 1$ i punkten (a, b, c) har $\nabla f(a, b, c) = (2a, 2b, -2c)$ som normalvektor, och det har alltså ekvationen $a(x - a) + b(y - b) + (-c)(z - c) = 0$, vilket kan skrivas som

$$ax + by - cz = 1, \quad (*)$$

eftersom punkten måste uppfylla $a^2 + b^2 - c^2 = 1$ för att ligga på ytan. Detta plan innehåller punkterna $(3, 2, 2)$ och $(5, 3, 3)$ om och endast om

$$3a + 2b - 2c = 1 \quad \text{och} \quad 5a + 3b - 3c = 1,$$

dvs. $(a, b, c) = (-1, 2 + t, t)$ där $t \in \mathbf{R}$. Det enda värde på t för vilket detta uppfyller ytans ekvation $a^2 + b^2 - c^2 = 1$ är $t = -1$. Alltså är $(a, b, c) = (-1, 1, -1)$ vilket sätts in i $(*)$ ovan för att få svaret.

Svar: Det enda sådana planet är $-x + y + z = 1$.

5. Integranden $f(x, y) = xy - 1$ växlar tecken i området (längs kurvan $xy = 1$), så vi måste undersöka den positiva delen och den negativa delen var för sig. Den positiva delen fås genom att integrera över området D^+ som ges av $x \geq 2$, $y \geq 0$ och $1 \leq xy \leq 2$:

$$\begin{aligned} \iint_{D^+} (xy - 1) dx dy &= \int_{x=2}^{\infty} \left(\int_{y=1/x}^{2/x} x \left(y - \frac{1}{x} \right) dy \right) dx \\ &= \int_{x=2}^{\infty} \left[\frac{1}{2} x \left(y - \frac{1}{x} \right)^2 \right]_{y=1/x}^{2/x} dx = \int_{x=2}^{\infty} \frac{dx}{2x}, \end{aligned}$$

vilket är en divergent integral. Därmed räknas hela dubbelintegralen över D som divergent (oavsett om den negativa delen är konvergent eller divergent, så den saken behöver inte undersökas).

Svar: Divergent.

6. (a) Definitionen är $f'_{\mathbf{v}}(a, b) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a + tv_1, b + tv_2) - f(a, b)}{t}$.
- (b) Formeln är $f'_{\mathbf{v}}(a, b) = \nabla f(a, b) \cdot \mathbf{v}$. Enligt definitionen av vanlig envariabelderivata kan gränsvärdet i (a) skrivas som $f'_{\mathbf{v}}(a, b) = g'(0)$, där $g(t) = f(a + tv_1, b + tv_2)$. Kedjeregeln ger $g'(t) = f'_x(a + tv_1, b + tv_2) v_1 + f'_y(a + tv_1, b + tv_2) v_2$. Insättning av $t = 0$ i detta ger $f'_{\mathbf{v}}(a, b) = g'(0) = f'_x(a, b) v_1 + f'_y(a, b) v_2 = \nabla f(a, b) \cdot \mathbf{v}$, vilket skulle visas.
- (c) Med $\nabla f(a, b) = \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}$ fås $\frac{A+B}{\sqrt{2}} = \sqrt{18}$ och $\frac{-2A+B}{\sqrt{5}} = -\sqrt{45}$, alltså $A = 7$ och $B = -1$.

Svar: Rikttningsderivatan är som störst i gradientens riktning: $\mathbf{v} = \frac{1}{\sqrt{50}} \begin{pmatrix} 7 \\ -1 \end{pmatrix}$. Gradientens belopp $\sqrt{50}$ är rikttningsderivatans största värde.