

Tentamen i TATA69 Flervariabelanalys

2015-10-26 kl. 8–13

Inga hjälpmedel tillåtna (inte heller miniräknare). 8/11/14 poäng med minst 3/4/5 uppgifter med minst 2 poäng (av 3 möjliga) ger betyg 3/4/5. Länk till lösningsskiss finns efter tentamen på kursens hemsida.

1. Bestäm alla lokala maximi- och minimipunkter till funktionen

$$f(x, y) = 2x^2 - 12xy + 9y^4.$$

2. Låt P och Q vara de två punkter i \mathbf{R}^3 där y -axeln skär ellipsoiden $(x - y + z)^2 + (2y - z)^2 + 3z^2 = 5$.

(a) Bestäm ellipsoidens tangentplan i punkten P och i punkten Q . (2p)

(b) Beräkna avståndet mellan dessa två plan. (1p)

3. Låt D vara det obegränsade område i \mathbf{R}^2 som bestäms av olikheterna $0 \leq 3x - y \leq 1$ och $0 \leq x - 2y$. Beräkna värdet hos den generaliserade integralen

$$\iint_D e^x dx dy$$

om den är konvergent, annars visa att den är divergent.

4. (a) Om tvåvariabelfunktionen f har bildats genom att sätta $f(x, y) = g(y - x^2)$, där g är en envariabelfunktion av klass \mathcal{C}^1 , vad blir då $f'_x(x, y)$ och $f'_y(x, y)$ (uttryckt i g)? Och vad blir $f'_x(x, y) + 2x f'_y(x, y)$?

(b) Vad kan man säga om nivåmängdernas utseende för en funktion f bildad på ovanstående sätt? Illustrera med en figur.

(c) Bestäm alla \mathcal{C}^1 -funktioner $f(x, y)$ som uppfyller $f'_x + 2x f'_y = y$.

(Gör t.ex. ett variabelbyte där $u = x$ är den ena nya variabeln, och där den andra variabeln v väljs med inspiration av de föregående deluppgifterna.)

5. Beräkna $\iiint_D z dx dy dz$, där

$$D = \left\{ (x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : z \geq \sqrt{x^2 + y^2} \text{ och } y^2 + z^2 \leq 1 \right\}.$$

6. Undersök om följande funktion är differentierbar i punkten $(0, 0)$:

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3 + x^2 y}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Lösningsskisser till TATA69 Flervariabelanalys 2015-10-26

1. Från $f(x, y) = 2x^2 - 12xy + 9y^4$ fås $\nabla f = (4x - 12y, -12x + 36y^3)$. Stationära punkter bestäms ur ekvationen $\nabla f = \mathbf{0}$, dvs. $3y = x = 3y^3$, vilket ger $(x, y) = (0, 0)$ eller $\pm(3, 1)$. Andraderivatorna är $f''_{xx} = 4$, $f''_{xy} = -12$, $f''_{yy} = 108y^2$, så den kvadratiska formen Q i Taylorutvecklingen kring respektive punkt blir

$$Q_{(0,0)}(h, k) = 4h^2 - 24hk + 0y^2 = 4((h - 3k)^2 - 9k^2),$$

som är indefinit eftersom t.ex. $Q_{(0,0)}(1, 0) = 4 \cdot 1 > 0$ och $Q_{(0,0)}(3, 1) = 4 \cdot (-9) < 0$, och

$$Q_{(3,1)}(h, k) = Q_{(-3,-1)}(h, k) = 4h^2 - 24hk + 108k^2 = 4((h - 3k)^2 + 18k^2),$$

som är positivt definit eftersom $Q_{\pm(3,1)} \geq 0$ överallt med likhet bara om $h - 3k = 0$ och $k = 0$, dvs. bara om $(h, k) = (0, 0)$. Alltså är $(0, 0)$ en sadelpunkt, och $\pm(3, 1)$ är lokala minimipunkter. (Värdena i dessa punkter är $f(0, 0) = 0$ respektive $f(3, 1) = f(-3, -1) = -9$.)

Svar: $(3, 1)$ och $(-3, -1)$ är lokala minimipunkter. Funktionen saknar lokala maximipunkter.

2. (a) Vi sätter $x = z = 0$ i ellipsoidens ekvation för att hitta skärningspunkterna P och Q ; detta ger $5y^2 = 5$, så punkterna är $(0, \pm 1, 0)$. Ellipsoidens normalvektor ges av gradienten

$$\nabla((x-y+z)^2 + (2y-z)^2 + 3z^2) = \begin{pmatrix} 2(x-y+z) \\ -2(x-y+z) + 4(2y-z) \\ 2(x-y+z) - 2(2y-z) + 6z \end{pmatrix},$$

som är lika med

$$\pm 2 \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix}$$

då $(x, y, z) = \pm(0, 1, 0)$. Tangentplanen blir alltså $-x + 5y - 3z = D$, där insättning av de två punkterna ger $D = \pm 5$.

Svar: Tangentplanen är $-x + 5y - 3z = 5$ och $-x + 5y - 3z = -5$.

- (b) Linjen $(x, y, z) = (-t, 5t, -3t)$ är vinkelrät mot planen och skär dem då $35t = \pm 5$, alltså $t = \pm 1/7$. Avståndet mellan planen är därmed $2/7$ gånger längden hos vektorn $\begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix}$, alltså $\frac{2}{7} \cdot \sqrt{35}$.

Svar: Avståndet mellan de två planen är $2\sqrt{5}/\sqrt{7}$.

3. Integranden e^x är positiv överallt, så vi kan använda variabelbyte och upprepad integration. Med $u = 3x - y$ och $v = x - 2y$ fås ett enklare område E som ges av $0 \leq u \leq 1$ och $0 \leq v$. Vidare är $\frac{d(u,v)}{d(x,y)} = \det \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} = -5$, så $dudv = |-5| dx dy = 5 dx dy$. Alltså:

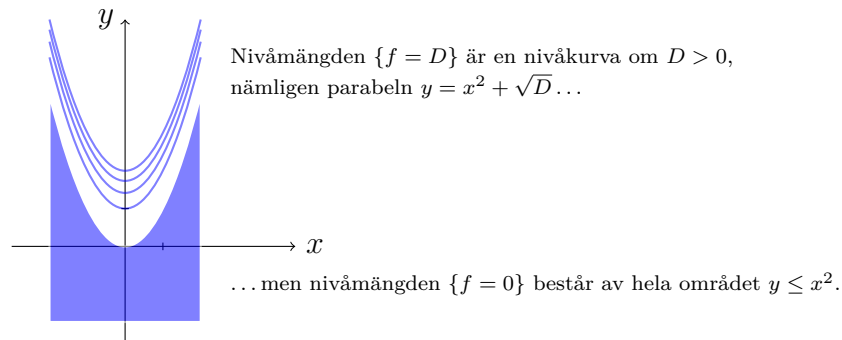
$$\begin{aligned} \iint_D e^x dx dy &= \frac{1}{5} \iint_E e^{(2u-v)/5} dudv = \frac{1}{5} \int_{v=0}^{\infty} \left(\int_{u=0}^1 e^{2u/5} e^{-v/5} du \right) dv \\ &= \frac{1}{5} \left[\frac{5}{2} e^{2u/5} \right]_{u=0}^1 \cdot \left(\lim_{\omega \rightarrow \infty} \left[-5e^{-v/5} \right]_{v=0}^{\omega} \right) = \frac{5}{2} (e^{2/5} - 1). \end{aligned}$$

Svar: $\frac{5}{2}(e^{2/5} - 1)$.

4. (a) Enligt kedjeregeln är $f'_x(x, y) = g'(y - x^2) \cdot (-2x)$ och $f'_y(x, y) = g'(y - x^2) \cdot 1$, vilket medför att $f'_x + 2x f'_y = 0$.
- (b) Svaret "parablerna $y = x^2 + C$ är nivåkurvor" godkänns.

Generellt sett kan dock situationen vara en aning mer komplicerad. Om punkten (x, y) ligger på parabeln $y = x^2 + C$ så är $f(x, y) = g(y - x^2) = g(C)$, dvs. f har samma värde $g(C)$ i alla punkter på denna parabel. Givet en konstant D består nivåmängden $\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : f(x, y) = D\}$ alltså av *unionen* av alla parabler $y = x^2 + C$ sådana att $g(C) = D$. (Eller så är den tomma mängden, ifall det inte finns några sådana C .)

För att ta ett konkret exempel: om $g(t) = t^2$ för $t > 0$ och $g(t) = 0$ för $t \leq 0$ så kommer f :s nivåmängder för $D = 0, 1, 2, 3, 4$ att se ut något i den här stilen:



- (c) Variabelbytet $u = x$ och $v = y - x^2$ ger $f'_x = f'_u - 2x f'_v$ och $f'_y = f'_v$ så att PDEn blir $f'_u = y = v + u^2$, med allmän lösning $f = uv + \frac{1}{3}u^3 + g(v) = xy - \frac{2}{3}x^3 + g(y - x^2)$.

Svar: $f(x, y) = xy - \frac{2}{3}x^3 + g(y - x^2)$, där g är en godtycklig C^1 -funktion av en variabel.

5. Kroppen utgörs av de punkter som ligger ovanför konen $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ och innanför cylindern $y^2 + z^2 = 1$. Den kan därmed lika gärna beskrivas med olikheten $\sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq \sqrt{1 - y^2}$, vilket gör det lämpligt att beräkna integralen med stavar i z -led, över det område E i xy -planet som ges av $\sqrt{x^2 + y^2} \leq \sqrt{1 - y^2}$, dvs. ellipsen $x^2 + 2y^2 \leq 1$. Omskalningen $(x, y) = (u, v/\sqrt{2})$ ändrar området till $u^2 + v^2 \leq 1$, dvs. enhetscirkelskivan i uv -planet (kalla den F), och därefter är det lämpligt att gå över till planpolära koordinater:

$$\begin{aligned} \iiint_D z \, dx \, dy \, dz &= \iint_E \left(\int_{z=\sqrt{x^2+y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} z \, dz \right) dx \, dy \\ &= \iint_E \frac{1}{2} \left((1 - y^2) - (x^2 + y^2) \right) dx \, dy \\ &= \iint_F \frac{1}{2} (1 - u^2 - v^2) \frac{du \, dv}{\sqrt{2}} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{2}} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \left(\int_{\rho=0}^1 (1 - \rho^2) \rho \, d\rho \right) d\varphi = \dots = \frac{\pi}{4\sqrt{2}}. \end{aligned}$$

Ett alternativ är att för fixt $x \in [-1, 1]$ betrakta tvärsnittet D_x , som är den mängd i yz -planet som ligger innanför cirkeln $y^2 + z^2 = 1$ och ovanför hyperbelgrenen $z = \sqrt{x^2 + y^2}$. Dessa kurvor skär varandra då $y = \pm\sqrt{(1 - x^2)}/2$, och vi får

$$\begin{aligned} \iiint_D z \, dx \, dy \, dz &= \int_{x=-1}^1 \left(\iint_{D_x} z \, dy \, dz \right) dx \\ &= 2 \int_{x=0}^1 \left(\int_{y=-\sqrt{(1-x^2)}/2}^{\sqrt{(1-x^2)}/2} \left(\int_{z=\sqrt{x^2+y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} z \, dz \right) dy \right) dx \\ &= \dots = 2 \int_{x=0}^1 \frac{\sqrt{2}}{3} (1 - x^2)^{3/2} dx = \dots = \frac{\pi}{4\sqrt{2}}. \end{aligned}$$

Tvärsnitt för fixt y är ännu ett alternativ, av ungefär samma svårighetsgrad. (Tvärsnitt för fixt z är däremot inte att rekommendera; det är i princip genomförbart, men man måste integrera över intervallen $0 \leq z \leq 1/\sqrt{2}$ och $1/\sqrt{2} \leq z \leq 1$ separat, och den andra av dessa två integraler, där cylindern så att säga börjar nagga konen i kanten, leder till rätt förfärliga primitivuträkningar.)

Svar: $\frac{\pi}{4\sqrt{2}}$.

6. Differentierbarhet i origo betyder att de partiella derivatorna i origo existerar och att uttrycket

$$\frac{f(x, y) - f(0, 0) - f'_x(0, 0)x - f'_y(0, 0)y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

har gränsvärdet noll då $(x, y) \rightarrow (0, 0)$. Längs axlarna (inklusive origo!) har vi $f(x, 0) = x$ och $f(0, y) = 0$, vilket visar att $f'_x(0, 0) = 1$ och $f'_y(0, 0) = 0$. Uttrycket att undersöka blir alltså

$$\frac{\frac{x^3 + x^2y}{x^2 + y^2} - 0 - 1 \cdot x - 0 \cdot y}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{x^2y - xy^2}{(x^2 + y^2)^{3/2}} = \frac{xy(x - y)}{(x^2 + y^2)^{3/2}}.$$

Uttryckt i polära koordinater $x = \rho \cos \varphi$, $y = \rho \sin \varphi$ blir detta lika med $\cos \varphi \sin \varphi (\cos \varphi - \sin \varphi)$ (oberoende av ρ), vilket visar att man får olika värden när man närmar sig origo längs olika räta linjer; t.ex. får man 0 längs x -axeln men $-1/\sqrt{2}$ längs linjen $y = -x$. Gränsvärdet existerar därmed inte, vilket visar att f inte är differentierbar i origo.

Svar: Nej, f är inte differentierbar i punkten $(0, 0)$.