Linköpings universitet | **Kurskod: TATA69**
Matematiska institutionen | **Provkod: TEN1**

Tentamen i TATA69 Flervariabelanalys

2015-08-20 kl 14–19

Inga hjälpmedel tillåtna (inte heller miniräknare). 8/11/14 poäng med minst 3/4/5 uppgifter med minst 2 poäng (av 3 möjliga) ger betyg 3/4/5. Länk till lösningsskiss finns efter tentamen på kursens hemsida.

1. Bestäm de tangentplan till ytan $xy + yz + xz = 1$ som är parallella med planet $x + 2y + z = 3$.

2. Bestäm alla lokala maximi- och minimipunkter till
$$f(x, y) = x^2y - 2x^2 - y^2.$$

3. Beräkna
$$\iiint_D (x - y)z \, dxdydz,$$
där området D ges av $x^2 + 4y^2 + z^2 \leq 4$, $z \leq 0$ och $2y \leq x$.

4. Bestäm alla $\mathcal{C}^1$-funktioner $g(t)$ (för $t > 0$) sådana att funktionen
$$f(x, y) = g(x^2 + y^2)$$
uppfyller
$$x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} = 6 + x^2 + y^2.$$

5. Beräkna $\iiint_D y \, dxdydz$, där området D ges av $x^2 + y^2 \leq z \leq 2$ och $y \geq |x|$.

6. Visa att sambanden
$$u = x^3 - xy, \qquad v = 2xy - y^2$$
kring punkten $(x, y) = (1, 2)$ definierar en lokal $\mathcal{C}^1$-invers
$$x = x(u, v), \qquad y = y(u, v).$$
Bestäm sedan x, y, x'_u, x'_v, y'_u och y'_v i punkten $(u, v) = (-1, 0)$.

Lösningsskisser till tentamen i TATA69 Flervariabelanalys 2015-08-20

1. Sätt $F(x, y, z) = xy + yz + xz$; då är den givna ytan nivåytan $F(x, y, z) = 1$. Tangentplanet till denna yta i en punkt (a, b, c) på ytan är parallellt med planet $x + 2y + z = 3$ precis då $\nabla F(a, b, c) \parallel (1, 2, 1)$ och $F(a, b, c) = 1$, d.v.s. precis då

$$(b + c, a + c, a + b) \parallel (1, 2, 1) \quad \text{och} \quad ab + bc + ac = 1.$$

Det första villkoret ger $a = c$ och $b = 0$, som insatt i det andra ger $c^2 = 1$, och därmed tangeringspunkterna $(1, 0, 1)$ och $(-1, 0, -1)$, med tangentplanen $x + 2y + z = 2$ respektive $x + 2y + z = -2$.

Svar: Planen är $x + 2y + z = \pm 2$.

2. Stationära punkter för f fås ur ekvationssystemet $f'_x = 2xy - 4x = 0$ och $f'_y = x^2 - 2y = 0$. Den andra ekvationen ger $y = x^2/2$, som insatt i den första ger $x^3 - 4x = 0$, d.v.s. $x = \pm 2$ eller $x = 0$. Vi får således tre stationära punkter: $(2, 2)$, $(-2, 2)$ och $(0, 0)$.

Andraderivatorna blir $f''_{xx} = 2y - 4$, $f''_{xy} = 2x$, $f''_{yy} = -2$.

I punkten $(2, 2)$ är $f''_{xx} = 0$ och $f''_{xy} = 4$, så vi får den kvadratiska formen

$$\begin{aligned} Q(h, k) &= \begin{pmatrix} h & k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} \\ f''_{xy} & f''_{yy} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h & k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} \\ &= -2k^2 + 8hk = -2(k - 2h)^2 + 8h^2, \end{aligned}$$

som är indefinit: exempelvis är $Q(0, 1) = -2 < 0$ medan $Q(1, 2) = 8 > 0$. Alltså är $(2, 2)$ ingen lokal extrempunkt för f.

I punkten $(-2, 2)$ blir fortfarande $f''_{xx} = 0$ medan $f''_{xy} = -4$, och vi får helt analogt $Q(h, k) = -2k^2 - 8hk = -2(k + 2h)^2 + 8h^2$, som också är infinit eftersom exempelvis $Q(0, 1) = -2 < 0$ medan $Q(-1, 2) = 8 > 0$. Alltså är inte heller $(-2, 2)$ någon lokal extrempunkt för f.

I punkten $(0, 0)$, slutligen, är $f''_{xx} = -4$ och $f''_{xy} = 0$, så $Q(h, k) = -4h^2 - 2k^2$, som är negativt definit eftersom $Q(h, k) \leq 0$ för alla (h, k), och $Q(h, k) = 0$ endast om $h = 0$ och $k = 0$, d.v.s. endast om $(h, k) = (0, 0)$. Alltså är punkten $(x, y) = (0, 0)$ en lokal maximipunkt för f.

Svar: $(0, 0)$ är en lokal maximipunkt. Lokala minimipunkter saknas.

3. Börja med det linjära bytet $u = x$, $v = 2y$, $w = z$; då är $|d(u, v, w)/d(x, y, z)| = 2$ så att $dxdydz = dudvdw/2$, och det nya området E ges av $u^2 + v^2 + w^2 \leq 4$, $w \leq 0$, $v \leq u$. Byt därefter till rymdpolära koordinater: $u = r \sin\theta \cos\varphi$, $v = r \sin\theta \sin\varphi$, $w = r \cos\theta$ med $dudvdw = r^2 \sin\theta \, drd\theta d\varphi$. Gränserna blir $0 \leq r \leq 2$, $\pi/2 \leq \theta \leq \pi$, $-3\pi/4 \leq \varphi \leq \pi/4$. Allt som allt:

$$\begin{aligned} \iiint_D (x - y)z \, dxdydz &= \iiint_E \frac{(2u - v)w}{2} \frac{dudvdw}{2} \\ &= \frac{1}{4} \int_0^2 r^4 \, dr \cdot \int_{\pi/2}^{\pi} \sin^2\theta \cos\theta \, d\theta \cdot \int_{-3\pi/4}^{\pi/4} (2\cos\varphi - \sin\varphi) \, d\varphi \\ &= \frac{1}{4} \left[\frac{r^5}{5} \right]_0^2 \left[\frac{\sin^3\theta}{3} \right]_{\pi/2}^{\pi} [2\sin\varphi + \cos\varphi]_{-3\pi/4}^{\pi/4} \\ &= \frac{1}{4} \cdot \frac{32}{5} \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) \cdot 3\sqrt{2} = -\frac{8\sqrt{2}}{5}. \end{aligned}$$

4. Kedjeregeln ger $f'_x(x, y) = g'(x^2 + y^2) \cdot 2x$ och $f'_y(x, y) = g'(x^2 + y^2) \cdot 2y$, så den givna ekvationen reduceras till

$$2(x^2 + y^2) \, g'(x^2 + y^2) = 6 + x^2 + y^2,$$

alltså

$$g'(t) = \frac{6+t}{2t}, \qquad t > 0.$$

Integration ger $g(t) = 3\ln t + t/2 + C$.

Svar: $g(t) = 3\ln t + t/2 + C$, där C är en godtycklig konstant.

5. Med stavar i z-led får vi stavarna $x^2 + y^2 \le z \le 2$, och projektionen $\widetilde{D}$ på xy-planet ges av $x^2 + y^2 \le 2$ och $y \ge |x|$, som kan skrivas $-1 \le x \le 1$, $|x| \le y \le \sqrt{2-x^2}$ (rita figur!). Således blir

$$\iiint_D y\,dxdydz = \iint_{\widetilde{D}} \left(\int_{x^2+y^2}^{2} y\,dz \right) dxdy = \int_{-1}^{1} \left(\int_{|x|}^{\sqrt{2-x^2}} (2 - x^2 - y^2)\, y\,dy \right) dx$$

$$= \int_{-1}^{1} \left[\frac{(2-x^2-y^2)^2}{-4} \right]_{y=|x|}^{y=\sqrt{2-x^2}} dx = \int_{-1}^{1} (1 - 2x^2 + x^4)\,dx = \frac{16}{15}.$$

6. Avbildningen är $\mathcal{C}^1$, och $(x,y) = (1,2)$ avbildas på $(u,v) = (-1,0)$. Funktionalmatrisen i punkten $(x,y) = (1,2)$ är

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = \begin{pmatrix} u'_x & u'_y \\ v'_x & v'_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x^2 - y & -x \\ 2y & 2x - 2y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix},$$

och eftersom denna matris är inverterbar (determinanten $= 2 \ne 0$) medför inversa funktionssatsen att avbildningen har en lokal $\mathcal{C}^1$-invers $x(u,v)$, $y(u,v)$ definierad i någon omgivning till $(u,v) = (-1,0)$. Trivialt är $x = 1$ och $y = 2$ när $(u,v) = (-1,0)$, medan derivatorna där fås med matrisinvers:

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{pmatrix} x'_u & x'_v \\ y'_u & y'_v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u'_x & u'_y \\ v'_x & v'_y \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1/2 \\ -2 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

Svar: I punkten $(u,v) = (-1,0)$ är $x = 1$, $y = 2$ och $x'_u = -1$, $x'_v = 1/2$, $y'_u = -2$, $y'_v = 1/2$.