

Tentamen i TATA69 Flervariabelanalys

2015-06-03 kl 14–19

Inga hjälpmedel tillåtna (inte heller miniräknare).

8/11/14 poäng med minst 3/4/5 uppgifter med minst 2 poäng (av 3 möjliga) ger betyg 3/4/5.

Länk till lösningsskiss finns efter tentamen på kursens hemsida.

1. Beräkna $\iiint_D (x+y) dx dy dz$, där D ges av $0 \leq x-y \leq y+z \leq 1$ och $0 \leq x-z \leq 1$.

2. Bestäm samtliga lokala maximi- och minimipunkter till

$$f(x, y) = \frac{2}{3}x^3 - x^2 - 2y^2 + 4xy.$$

3. Beräkna volymen av den kropp som begränsas av ytorna $z = x^2 + y^2$ och $2x - 4y + z = 4$.

4. Bestäm ekvationen för tangentplanet till ytan $x^3 - 4z^3 + 2xyz + 9z = 0$ i de punkter där linjen $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ skär ytan.

5. Bestäm alla \mathcal{C}^1 -lösningar $u(x, y, z)$ till följande differentialekvationssystem:

$$\begin{cases} u'_x = 2 \sin^2 y - z \\ u'_y = 2x \sin 2y - z \sin y \end{cases}$$

med bivillkoret $u(x, 0, x) = x$ för alla $x \in \mathbf{R}$.

6. Visa att

(a) sambandet

$$yz^3 + e^{xz} - 3x^2y = 3$$

implicit definierar en \mathcal{C}^1 -funktion $x = f(y, z)$ i en omgivning till punkten $(0, 2, 1)$,

(b) ekvationssystemet

$$\begin{cases} yz^3 + e^{xz} - 3x^2y = 3 \\ \ln(x+y) + x^2yz = \ln 2 \end{cases}$$

implicit definierar \mathcal{C}^1 -funktioner $x = g(y)$, $z = h(y)$ i en omgivning till $(0, 2, 1)$,

(c) avbildningen

$$\begin{cases} u = x + y + z \\ v = xy + yz + zx \\ w = x^3 + y^3 + z^3 \end{cases}$$

har en lokal \mathcal{C}^1 -invers kring varje punkt $(x, y, z) \in \mathbf{R}^3$ sådan att $x \neq y$, $y \neq z$ och $z \neq x$.

För full poäng krävs att man verifierar att alla förutsättningar är uppfyllda i de satser som används.

Lösningsskisser till tentamen i TATA69 Flervariabelanalys 2015-06-03

1. Det linjära variabelbytet

$$\begin{cases} u = x - y, \\ v = y + z, \\ w = x - z, \end{cases} \quad \frac{d(u, v, w)}{d(x, y, z)} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -2, \quad dudvdw = |-2| dx dy dz = 2 dx dy dz,$$

ger nytt område $E : 0 \leq u \leq v \leq 1, 0 \leq w \leq 1$, och, med skivor på fixa w -nivåer,

$$\begin{aligned} \iiint_D (x + y) dx dy dz &= \iiint_E (v + w) \frac{dudvdw}{2} = \frac{1}{2} \int_0^1 \left(\int_0^1 \left(\int_0^v (v + w) du \right) dv \right) dw \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 \left(\int_0^1 (v^2 + vw) dv \right) dw = \frac{1}{2} \int_0^1 \left(\frac{1}{3} + \frac{w}{2} \right) dw = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4} \right) = \frac{7}{24}. \end{aligned}$$

2. De stationära punkterna fås ur $f'_x = 2x^2 - 2x + 4y = 0$ och $f'_y = -4y + 4x = 0$. Den andra ekvationen ger genast $y = x$, som insatt i den första ger $2x^2 + 2x = 0$, d.v.s. $x = 0$ eller $x = -1$. De stationära punkterna är således $(0, 0)$ och $(-1, -1)$.

Andraderivatorna blir $f''_{xx} = 4x - 2$, $f''_{xy} = 4$ och $f''_{yy} = -4$.

I $(0, 0)$ blir $f''_{xx} = -2$, $f''_{xy} = 4$ och $f''_{yy} = -4$, och den kvadratiske formen

$$\begin{aligned} Q(h, k) &= \begin{pmatrix} h & k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} \\ f''_{xy} & f''_{yy} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h & k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 4 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} \\ &= -2h^2 + 8hk - 4k^2 = -4(k - h)^2 + 2h^2 \end{aligned}$$

är indefinit eftersom t.ex. $Q(1, 1) = 2 > 0$ medan $Q(0, 1) = -4 < 0$, så punkten $(0, 0)$ är ingen lokal extrempunkt för f .

I $(-1, -1)$ blir $f''_{xx} = -6$, $f''_{xy} = 4$ och $f''_{yy} = -4$, och vi får den kvadratiske formen

$$Q(h, k) = -6h^2 + 8hk - 4k^2 = -4(k - h)^2 - 2h^2$$

som är negativt definit eftersom $Q(h, k) \leq 0$ för alla (h, k) och $Q(h, k) = 0$ endast om $k - h = 0$ och $h = 0$, d.v.s. endast om $(h, k) = (0, 0)$. Således är punkten $(-1, -1)$ en lokal maximipunkt för f .

Svar: $(-1, -1)$ är en lokal maximipunkt. Lokala minimipunkter saknas.

3. Ytorna skär varandra längs kurvan där $z = x^2 + y^2$ och $z = 4 - 2x + 4y$ samtidigt, och denna kurvas projektion på xy -planet är kurvan $x^2 + y^2 = 4 - 2x + 4y$, d.v.s. cirkeln $(x + 1)^2 + (y - 2)^2 = 9$. Låt D vara den aktuella kroppen; dess projektion \tilde{D} på xy -planet är cirkelskivan $(x + 1)^2 + (y - 2)^2 \leq 9$. Med i tur och ordning (1) stavar $x^2 + y^2 \leq z \leq 4 - 2x + 4y$ i z -led; (2) linjärt byte $u = x + 1$, $v = y - 2$ som överför \tilde{D} till en ny mängd $\tilde{E} : u^2 + v^2 \leq 9$ och ger $dx dy = dudv$; och (3) planpolärt byte $u = \rho \cos \varphi$, $v = \rho \sin \varphi$ med ny mängd $0 \leq \rho \leq 3$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ och $dudv = \rho d\rho d\varphi$, får vi att

$$\begin{aligned} \text{volym}(D) &= \iiint_D dx dy dz \stackrel{(1)}{=} \iint_{\tilde{D}} ((4 - 2x + 4y) - (x^2 + y^2)) dx dy \stackrel{(2)}{=} \iint_{\tilde{E}} (9 - u^2 - v^2) dudv \\ &\stackrel{(3)}{=} \int_0^3 \left(\int_0^{2\pi} d\varphi \right) (9 - \rho^2) \rho d\rho = 2\pi \left[\frac{(9 - \rho^2)^2}{-4} \right]_0^3 = \frac{81\pi}{2}. \end{aligned}$$

4. För att bestämma de punkter där linjen skär ytan sätter man in $x = 1 + 2t$, $y = 3$, $z = 2 + t$ i ytans ekvation och löser ut t :

$$\begin{aligned} 0 &= f(x, y, z) = x^3 - 4z^3 + 2xyz + 9z \\ &= (1 + 2t)^3 - 4(2 + t)^3 + 6(1 + 2t)(2 + t) + 9(2 + t) \\ &= 4t^3 - 3t - 1 = (t - 1)(2t + 1)^2, \end{aligned}$$

alltså $t = 1$ eller $t = -1/2$, vilket ger punkterna $(3, 3, 3)$ och $(0, 3, 3/2)$.

Ur $\nabla f(x, y, z) = (3x^2 + 2yz, 2xz, -12z^2 + 2xy + 9)$ fås $\nabla f(3, 3, 3) = 9(5, 2, -9)$ och $\nabla f(0, 3, 3/2) = 9(1, 0, -2)$, så vi kan ta $(5, 2, -9)$ och $(1, 0, -2)$ som normalvektor till tangentplanet i respektive punkt.

Svar: Tangentplanet i $(3, 3, 3)$ är $5x + 2y - 9z = -6$, och tangentplanet i $(0, 3, 3/2)$ är $x - 2z = -3$.

5. Integration av den första ekvationen m.a.p. x ger $u = 2x \sin^2 y - xz + f(y, z)$, och derivering av u m.a.p. y och insättning i den andra ekvationen ger $2x \cdot 2 \sin y \cos y + f'_y(y, z) = 2x \sin 2y - z \sin y$, d.v.s. $f'_y(y, z) = -z \sin y$ (eftersom $\sin 2y = 2 \sin y \cos y$), varför $f(y, z) = z \cos y + h(z)$. Således är $u(x, y, z) = 2x \sin^2 y - xz + z \cos y + h(z)$, och bivillkoret ger nu $x = u(x, 0, x) = -x^2 + x + h(x)$, $x \in \mathbf{R}$, d.v.s. $h(t) = t^2$, $t \in \mathbf{R}$, och därmed är $u(x, y, z) = 2x \sin^2 y - xz + z \cos y + z^2$.

Svar: $u(x, y, z) = 2x \sin^2 y - xz + z \cos y + z^2$.

6. Låt i (a) och (b) $F(x, y, z) = yz^3 + e^{xz} - 3x^2y$ och $G(x, y, z) = \ln(x + y) + x^2yz$. Då är F och G \mathcal{C}^1 -funktioner i en omgivning till punkten $P = (0, 2, 1)$, och $F(0, 2, 1) = 3$ och $G(0, 2, 1) = \ln 2$.

(a) Eftersom $F'_x = z e^{xz} - 6xy = 1 \neq 0$ i P medför implicita funktionssatsen att ekvationen $F(x, y, z) = 3$ i en omgivning till $(0, 2, 1)$ definierar en \mathcal{C}^1 -funktion $x = f(y, z)$.

(b) Eftersom

$$\frac{\partial(F, G)}{\partial(x, z)} = \begin{pmatrix} F'_x & F'_z \\ G'_x & G'_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z e^{xz} - 6xy & 3yz^2 + x e^{xz} \\ (x + y)^{-1} + 2xyz & x^2y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 1/2 & 0 \end{pmatrix}$$

i P , och denna matris har determinant $-3 \neq 0$ och därmed är inverterbar, medför implicita funktionssatsen att ekvationssystemet $F(x, y, z) = 3$, $G(x, y, z) = \ln 2$ i en omgivning till $(0, 2, 1)$ definierar \mathcal{C}^1 -funktioner $x = g(y)$ och $z = h(y)$.

(c) Funktionerna $u = x + y + z$, $v = xy + yz + zx$ och $w = x^3 + y^3 + z^3$ är alla \mathcal{C}^1 , och

$$\frac{d(u, v, w)}{d(x, y, z)} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ y + z & x + z & x + y \\ 3x^2 & 3y^2 & 3z^2 \end{vmatrix} \stackrel{(1)}{=} 3 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ y + z & x - y & x - z \\ x^2 & y^2 - x^2 & z^2 - x^2 \end{vmatrix} \stackrel{(2)}{=} 3(x - y)(x - z)(y - z),$$

där vi i steg 1 har brutit ut faktorn 3 från rad 3 och sedan subtraherat kolonn 1 från kolonn 2 och kolonn 3, och i steg 2 har brutit ut faktorn $(x - y)$ ur kolonn 2 och $(x - z)$ ur kolonn 3. Om (x, y, z) är en punkt sådan att $x \neq y$, $y \neq z$ och $z \neq x$ är alltså funktionaldeterminanten $\neq 0$ där, och därför medför inversa funktionssatsen att det finns en lokal \mathcal{C}^1 -invers $x(u, v, w)$, $y(u, v, w)$, $z(u, v, w)$ i en omgivning till punkten.