

Tentamen i TATA69 Flervariabelanalys

2014-08-21 kl 14–19

Inga hjälpmedel tillåtna (inte heller miniräknare).

8/11/14 poäng med minst 3/4/5 uppgifter med minst 2 poäng (av 3 möjliga) ger betyg 3/4/5. Länk till lösningsskiss finns efter tentamen på kursens hemsida.

1. Bestäm alla funktioner $f(x, y)$ av klass \mathcal{C}^1 som löser differentialekvationen

$$2xf'_x - yf'_y = xy, \quad x > 0, \quad y > 0$$

under bivillkoret $f(1, y) = 0$, exempelvis med hjälp av variabelbytet $u = xy^2, v = y$.

2. Beräkna $\iint_D x \, dx \, dy$, där D ges av $x^2 + xy + y^2 \leq 1$ och $x \geq 0$.

3. Visa att sambandet

$$3y^2 - 2x^3 - 6xyz + z^3 = -4$$

i en omgivning till punkten $(1, 1, 1)$ definierar en \mathcal{C}^1 -funktion $z = z(x, y)$. Beräkna $z(1, 1), z'_x(1, 1)$ och $z'_y(1, 1)$, samt bestäm tangentplanet till funktionsytan i punkten $(1, 1, 1)$.

4. Bestäm alla punkter P på kurvan

$$x^2 + y^3 = 1$$

sådana att kurvans normallinje i P går genom origo.

5. Beräkna

$$\iiint_D \frac{dx \, dy \, dz}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}},$$

där D är klotet med radie 1 och medelpunkt i $(0, 0, 1)$.

6. Bestäm alla a och b sådana att

$$f(x, y) = e^{ax} - x + bxy + 2y^2$$

har lokalt minimum i origo.

Lösningsskisser till tentamen i TATA69 Flervariabelanalys 2014-08-21

1. Kedjeregeln ger $f'_x = f'_u u'_x + f'_v v'_x = y^2 f'_u$ och $f'_y = f'_u u'_y + f'_v v'_y = 2xy f'_u + f'_v$, och insättning i differentialekvationen ger $-y f'_v = xy$ för $x > 0, y > 0$, d.v.s. $f'_v = -u/v^2$ för $u > 0, v > 0$, som integrerad ger $f = u/v + g(u) = xy + g(xy^2)$, där g är en C^1 -funktion av en variabel. Bivillkoret ger nu $0 = f(1, y) = y + g(y^2)$ då $y > 0$, så $g(t) = -\sqrt{t}$ för $t > 0$, och därmed får vi till sist $f(x, y) = xy - \sqrt{xy^2} = (x - \sqrt{x})y$ då $x > 0$ och $y > 0$.

Svar: $f(x, y) = (x - \sqrt{x})y$.

2. Eftersom $x^2 + xy + y^2 = (y + x/2)^2 + (x\sqrt{3}/2)^2$ gör vi först det linjära bytet $u = x/2 + y, v = x\sqrt{3}/2$, som ger $dudv = |d(u, v)/d(x, y)| dx dy = (\sqrt{3}/2) dx dy$ och nytt område E , där $u^2 + v^2 \leq 1$ och $v \geq 0$, och därefter det planpolära bytet $u = \rho \cos \varphi, v = \rho \sin \varphi$ med ny mängd $F: 0 \leq \rho \leq 1, 0 \leq \varphi \leq \pi$ och $dudv = \rho d\rho d\varphi$, varför

$$\iint_D x dx dy = \iint_E \frac{2v}{\sqrt{3}} \frac{2 dudv}{\sqrt{3}} = \frac{4}{3} \int_0^\pi \sin \varphi d\varphi \cdot \int_0^1 \rho^2 d\rho = \frac{4}{3} \cdot 2 \cdot \frac{1}{3} = \frac{8}{9}.$$

3. Låt $F(x, y, z) = 3y^2 - 2x^3 - 6xyz + z^3$. Eftersom $F \in C^1, F(1, 1, 1) = -4$ och $F'_z = 3z^2 - 6xy = -3 \neq 0$ i punkten $(1, 1, 1)$, så definierar ekvationen $F(x, y, z) = -4$ enligt implicita funktionssatsen en C^1 -funktion $z(x, y)$ i en omgivning till $(1, 1, 1)$. Per definition är $z(1, 1) = 1$, och eftersom $3y^2 - 2x^3 - 6xyz(x, y) + z(x, y)^3 = -4$ för alla (x, y) i en omgivning till $(1, 1)$, så ger derivering m.a.p. x att $-6x^2 - 6yz - 6xy z'_x + 3z^2 z'_x = 0$, så $z'_x = (6yz + 6x^2)/(3z^2 - 6xy)$; analogt får vi att $z'_y = (6xz - 6y)/(3z^2 - 6xy)$. Insättning ger $z'_x(1, 1) = -4$ och $z'_y(1, 1) = 0$, och tangentplanets ekvation är därmed $z = 1 - 4(x - 1) + 0(y - 1)$, d.v.s. $4x + z = 5$.

Svar: $z(1, 1) = 1, z'_x(1, 1) = -4, z'_y(1, 1) = 0$; tangentplanets ekvation är $4x + z = 5$.

4. Sätt $F(x, y) = x^2 + y^3$; då är den givna kurvan nivåkurvan $F(x, y) = 1$. Normalen till kurvan i punkten (a, b) på kurvan går genom origo precis då $\nabla F(a, b) \parallel (a - 0, b - 0)$, d.v.s. precis då

$$0 = \begin{vmatrix} 2a & 3b^2 \\ a & b \end{vmatrix} = ab(2 - 3b).$$

Fallet $a = 0$ ger i $F(a, b) = 1$ att $(a, b) = (0, 1)$, fallet $b = 0$ ger på samma sätt $(a, b) = (\pm 1, 0)$, medan fallet $b = 2/3$ ger $(a, b) = (\pm\sqrt{19/27}, 2/3)$.

Svar: $(0, 1), (\pm 1, 0)$ och $(\pm\sqrt{19/27}, 2/3)$, totalt fem punkter.

5. Integralen är generaliserad i origo, men integranden är positiv, så variabelbyte och upprepad integration får användas.

Klotet D ges av olikheten $x^2 + y^2 + (z - 1)^2 \leq 1$, d.v.s. $x^2 + y^2 + z^2 \leq 2z$, som i rympolära koordinater blir $r^2 \leq 2r \cos \theta$. Rympolärt byte ger därför ny mängd E som bestäms av olikheterna $0 \leq \varphi \leq 2\pi, 0 \leq \theta \leq \pi/2$ och $0 \leq r \leq 2 \cos \theta$, och som vanligt är $dx dy dz = r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi$. Vi får

$$\begin{aligned} \iiint_D \frac{dx dy dz}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} &= \iiint_E \frac{r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi}{r} = \int_0^{2\pi} d\varphi \cdot \int_0^{\pi/2} \left(\int_0^{2 \cos \theta} r dr \right) \sin \theta d\theta \\ &= 2\pi \int_0^{\pi/2} 2 \cos^2 \theta \sin \theta d\theta = 4\pi \left[-\frac{\cos^3 \theta}{3} \right]_0^{\pi/2} = \frac{4\pi}{3}. \end{aligned}$$

6. $\nabla f = (ae^{ax} - 1 + by, bx + 4y) = (a - 1, 0)$ i origo, och ett *nödvändigt* villkor för att f skall ha lokalt minimum i origo är att $\nabla f(0, 0) = (0, 0)$, d.v.s. att $a = 1$.

Om nu $a = 1$, så ger Maclaurinutvecklingen $e^t = 1 + t + t^2/2 + t^3/6 + \mathcal{O}(t^4)$ och kvadratkomplettering att

$$f(x, y) = e^x - x + bxy + 2y^2 = 1 + \frac{1}{2}((x + by)^2 + (4 - b^2)y^2) + \frac{x^3}{6} + \mathcal{O}(x^4).$$

Den kvadratiska formen $Q(x, y) = (x + by)^2 + (4 - b^2)y^2$ är positivt definit om $b^2 < 4$ och indefinit om $b^2 > 4$, så f har lokalt minimum i origo om $b^2 < 4$ men saknar lokalt extremvärde där om $b^2 > 4$. I de återstående fallen, $b = \pm 2$, är Q positivt semidefinit, och därför krävs vidare undersökning: Eftersom $f(bt, -t) = 1 + t^3(b^3/6 + \mathcal{O}(t))$ då, och $b^3/6 \neq 0$, så antar $f(x, y)$ både större och mindre värden än $f(0, 0) = 1$ i varje omgivning till $(0, 0)$, så f saknar lokalt extremvärde i origo. Svar: $a = 1, -2 < b < 2$.