

## Tentamen i TATA69 Flervariabelanalys

2014-06-04 kl 14–19

Inga hjälpmedel tillåtna (inte heller miniräknare).

8/11/14 poäng med minst 3/4/5 uppgifter med minst 2 poäng (av 3 möjliga) ger betyg 3/4/5. Länk till lösningsskiss finns efter tentamen på kursens hemsida.

Resultatet blir klart inom 10 arbetsdagar. Information om visning ges då på kursens hemsida.

1. Bestäm samtliga lokala maximi- och minimipunkter till

$$f(x, y) = x^2 + y^2 - 4xy - x^3.$$

2. Bestäm de tangentplan till ytan  $x^2 + 2y^2 + 2xz + 4z^2 = 23$  som är parallella med planet  $3x - 2y + 9z = 1$ .

3. Beräkna

$$\iint_D (x - y) \, dx dy,$$

där  $D$  är triangeln med hörn i  $(0, 0)$ ,  $(-1, 1)$  och  $(4, 2)$ .

4. Beräkna

$$\iiint_D x^2 z \, dx dy dz,$$

där  $D$  ges av  $x^2 + y^2 + z^2 \leq 2$ ,  $z \geq \sqrt{3x^2 + 3y^2}$  och  $0 \leq x \leq y$ .

5. (a) Definiera vad som menas med att  $\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x, y) = L$ .

(b) Undersök  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\ln(1+xy)}{x^2+y^2}$       (c) Undersök  $\lim_{(x,y,z) \rightarrow (0,0,0)} \frac{\ln(1+xyz)}{x^2+y^2+z^2}$

6. Visa att sambandet

$$\begin{cases} u = x + \arctan y, \\ v = y + \arctan z, \\ w = z + \arctan x, \end{cases}$$

kring varje punkt  $(x, y, z) \in \mathbf{R}^3$  definierar en lokal  $\mathcal{C}^1$ -invers

$$\begin{cases} x = x(u, v, w), \\ y = y(u, v, w), \\ z = z(u, v, w). \end{cases}$$

Undersök också om det finns en global invers.

## Lösningsskisser till tentamen i TATA69 Flervariabelanalys 2014-06-04

1. De stationära punkterna fås ur  $f'_x = 2x - 4y - 3x^2 = 0$  och  $f'_y = 2y - 4x = 0$ . Den andra ekvationen ger genast  $y = 2x$ , som insatt i den första ger  $3x^2 + 6x = 0$ , d.v.s.  $x = 0$  eller  $x = -2$ , och vi får därmed två stationära punkter:  $(0, 0)$  och  $(-2, -4)$ .

Andraderivatorna blir  $f''_{xx} = 2 - 6x$ ,  $f''_{xy} = -4$  och  $f''_{yy} = 2$ .

I  $(0, 0)$  blir  $f''_{xx} = 2$ , och den kvadratiska formen

$$\begin{aligned} Q(h, k) &= (h \ k) \begin{pmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} \\ f''_{xy} & f''_{yy} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} = (h \ k) \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -4 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} \\ &= 2h^2 - 8hk + 2k^2 = 2(k - 2h)^2 - 6h^2, \end{aligned}$$

som är indefinit eftersom t.ex.  $Q(0, 1) = 2 > 0$  medan  $Q(1, 2) = -6 < 0$ , så punkten  $(0, 0)$  är ingen lokal extrempunkt för  $f$ .

I  $(-2, -4)$  blir  $f''_{xx} = 14$ , och vi får den kvadratiska formen

$$Q(h, k) = 14h^2 - 8hk + 2k^2 = 2(k - 2h)^2 + 6h^2,$$

som är positivt definit eftersom  $Q(h, k) \geq 0$  för alla  $(h, k)$  och  $Q(h, k) = 0$  endast om  $k - 2h = 0$  och  $h = 0$ , d.v.s. endast om  $(h, k) = (0, 0)$ . Således är punkten  $(-2, -4)$  en lokal minimipunkt för  $f$ .

Svar:  $(-2, -4)$  är en lokal minimipunkt. Lokala maximipunkter saknas.

2. Sätt  $F(x, y, z) = x^2 + 2y^2 + 2xz + 4z^2$ ; då är den givna ytan nivåytan  $F(x, y, z) = 23$ . Tangentplanet till denna yta i en punkt  $(a, b, c)$  på ytan är parallellt med planet  $3x - 2y + 9z = 1$  precis då  $\nabla F(a, b, c) \parallel (3, -2, 9)$  och  $F(a, b, c) = 23$ , d.v.s. precis då

$$(2a + 2c, 4b, 2a + 8c) \parallel (3, -2, 9) \quad \text{och} \quad a^2 + 2b^2 + 2ac + 4c^2 = 23.$$

Det första villkoret ger  $b = -a$  och  $c = 2a$ , som insatt i det andra ger  $a^2 = 1$ , och därmed tangeringspunkterna  $(1, -1, 2)$  och  $(-1, 1, -2)$ , med tangentplanen  $3x - 2y + 9z = 23$  respektive  $3x - 2y + 9z = -23$ .

Svar: Planen är  $3x - 2y + 9z = \pm 23$ .

3. Linjärt byte  $u = x + y$ ,  $v = x - 2y$  ger ny, enklare, triangel  $E$  med hörn  $(0, 0)$ ,  $(0, -3)$  och  $(6, 0)$ , så  $E$  ges av olikheterna  $-3 \leq v \leq 0$  och  $0 \leq u \leq 6 + 2v$ . Vidare,  $d(u, v)/d(x, y) = -3$ , så  $dxdy = dudv/3$ . Eftersom  $x - y = (u + 2v)/3$  får vi därför

$$\iint_D (x - y) \, dxdy = \frac{1}{9} \int_{-3}^0 \left( \int_0^{6+2v} (u + 2v) \, du \right) dv = \frac{2}{3} \int_{-3}^0 (3 + 4v + v^2) \, dv = 0.$$

4. Mängden  $D$  är en åttondels "glass-strut"; olikheterna kan i tur och ordning översättas till  $0 \leq r \leq \sqrt{2}$ ,  $0 \leq \theta \leq \pi/6$  respektive  $\pi/4 \leq \varphi \leq \pi/2$ , rita figur! Rympolärt byte  $x = r \sin \theta \cos \varphi$ ,  $y = r \sin \theta \sin \varphi$ ,  $z = r \cos \theta$  ger  $dx dy dz = r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi$  och ny mängd  $E$  med gränser enligt ovan. Vi får

$$\begin{aligned} \iiint_D x^2 z dx dy dz &= \iiint_E (r \sin \theta \cos \varphi)^2 r \cos \theta \cdot r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi \\ &= \int_0^{\sqrt{2}} r^5 dr \cdot \int_0^{\pi/6} \sin^3 \theta \cos \theta d\theta \cdot \int_{\pi/4}^{\pi/2} \cos^2 \varphi d\varphi \\ &= \left[ \frac{r^6}{6} \right]_0^{\sqrt{2}} \cdot \left[ \frac{\sin^4 \theta}{4} \right]_0^{\pi/6} \cdot \left[ \frac{\varphi}{2} + \frac{\sin 2\varphi}{4} \right]_{\pi/4}^{\pi/2} = \frac{8}{6} \cdot \frac{(1/2)^4}{4} \cdot \left( \frac{\pi}{8} - \frac{1}{4} \right) = \frac{\pi - 2}{384}. \end{aligned}$$

5. (a) För varje  $\epsilon > 0$  finns  $\delta > 0$  sådant att  $|f(x, y) - L| < \epsilon$  för alla punkter  $(x, y)$  i definitionsmängden för  $f$  sådana att  $0 < |(x, y) - (a, b)| < \delta$ .
- (b) Sätt  $f(x, y) = (\ln(1 + xy))/(x^2 + y^2)$ . Eftersom  $f(t, 0) = 0 \rightarrow 0$  då  $t \rightarrow 0$  medan  $f(t, t) = (\ln(1 + t^2))/(2t^2) \rightarrow 1/2$  då  $t \rightarrow 0$  saknar  $f$  gränsvärde då  $(x, y) \rightarrow (0, 0)$ .
- (c) Eftersom  $\ln(1 + t) = \mathcal{O}(t)$  och  $xyz = \mathcal{O}(r^3)$  i rympolära koordinater får vi genast att  $(\ln(1 + xyz))/(x^2 + y^2 + z^2) = \mathcal{O}(r^3)/r^2 = \mathcal{O}(r) \rightarrow 0$  då  $r \rightarrow 0$  (och  $\theta$  och  $\varphi$  varierar fritt), d.v.s. då  $(x, y, z) \rightarrow (0, 0, 0)$ .

6. Vi noterar att avbildningen  $(x, y, z) \mapsto (u, v, w)$  är  $\mathcal{C}^1$ , och att den har funktionaldeterminant

$$\frac{d(u, v, w)}{d(x, y, z)} = 1 + \frac{1}{1+x^2} \cdot \frac{1}{1+y^2} \cdot \frac{1}{1+z^2} \geq 1$$

för alla  $(x, y, z) \in \mathbf{R}^3$ ; speciellt är determinanten  $\neq 0$ , så inversa funktions-satsen medför att avbildningen kring varje punkt  $(x, y, z)$  har en lokal  $\mathcal{C}^1$ -invers  $x = x(u, v, w)$ ,  $y = y(u, v, w)$ ,  $z = z(u, v, w)$ .

För att undersöka om avbildningen har en global invers fixerar vi  $(u, v, w) \in \mathbf{R}^3$ ; vi vill visa att ekvationssystemet  $u = x + \arctan y$ ,  $v = y + \arctan z$ ,  $w = z + \arctan x$ , har högst en lösning  $(x, y, z)$  för detta  $(u, v, w)$ . Antag tvärtom att två punkter,  $(x_1, y_1, z_1)$  och  $(x_2, y_2, z_2)$ , avbildas på  $(u, v, w)$ . Om  $x_1 > x_2$  får vi i så fall från den första ekvationen att  $\arctan y_1 - \arctan y_2 = x_2 - x_1 < 0$ , och eftersom  $\arctan$  är strängt växande är därför  $y_1 < y_2$ . Men detta medför att  $\arctan z_1 - \arctan z_2 = y_2 - y_1 > 0$ , så  $z_1 > z_2$ , vilket i sin tur medför att  $\arctan x_1 - \arctan x_2 = z_2 - z_1 < 0$ , så  $x_1 < x_2$ , en motsägelse. Inte heller  $x_1 < x_2$  är möjligt (numrera om, om nödvändigt). Således är  $x_1 = x_2$ , och därmed följer det från ekvationssystemet att  $z_1 = z_2$  och  $y_1 = y_2$ .

Svar: Global invers finns.