

Tentamen i TATA69 Flervariabelanalys

2014-01-07 kl. 14–19

Inga hjälpmedel tillåtna (inte heller miniräknare).

8/11/14 poäng med minst 3/4/5 uppgifter med minst 2 poäng (av 3 möjliga) ger betyg 3/4/5. Länk till lösningsskiss finns efter tentamen på kursens hemsida.

Resultatet blir klart inom 10 arbetsdagar. Information om visning ges då på kursens hemsida.

- (a) Bestäm alla funktioner $f(x, y)$ av klass \mathcal{C}^1 som löser differentialekvationen $f'_x + 2xf'_y = xy + x^3$. (Använd t.ex. variabelbytet $u = x$, $v = x^2 - y$.) (1p)
(b) Bestäm speciellt alla som dessutom uppfyller bivillkoret $f(0, y) = y/2$. (1p)
(c) Visa genom insättning att ditt svar i (b) verkligen uppfyller både differentialekvationen och bivillkoret! (1p)
- Bestäm alla lokala maximi- och minimipunkter för

$$f(x, y, z) = 2xy + 2xz - y^2 - z^2 - x^3.$$

- Beräkna $\iiint_D (x - z) dx dy dz$, där

$$D = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : 0 \leq x + 4y - z \leq x + y \leq y + z \leq 1\}.$$

- Beräkna $\iint_D xy dx dy$, där området $D \subset \mathbf{R}^2$ ges av olikheterna $1 \leq x^2 + 3y^2 \leq 3$ och $0 \leq y \leq x$.
- Visa att villkoren $xyz + e^{2x} = y$ och $x + 3y - z = 1$ implicit definierar x och y som \mathcal{C}^1 -funktioner av z i en omgivning till punkten $(x, y, z) = (0, 1, 2)$. Ange värdena $x(2)$, $y(2)$, $x'(2)$ och $y'(2)$. Den geometriska tolkningen av situationen är att två ytor skär varandra längs en kurva; bestäm denna kurvas tangentlinje i punkten $(0, 1, 2)$.
- Beräkna volymen av skärningen mellan den cirkulära cylindern

$$D_1 = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : x^2 + z^2 \leq 1\}$$

och den kvadratiska cylindern

$$D_2 = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : |x| + |y| \leq 1\}.$$

Lösningsskisser till tentamen i TATA69 Flervariabelanalys 2014-01-07

1. (a) Med $u = x$ och $v = x^2 - y$ fås enligt kedjeregeln $f'_x = f'_u + 2xf'_v$ och $f'_y = -f'_v$. Insättning av detta i PDE:n ger $(f'_u + 2xf'_v) + 2x(-f'_v) = xy + x^3$, alltså $f'_u = u(u^2 - v) + u^3 = 2u^3 - uv$. Integration med avseende på u ger $f(u, v) = u^4/2 - u^2v/2 + g(v)$, där g är en godtycklig C^1 -funktion av en variabel. Uttryckt i de ursprungliga koordinaterna har vi därmed svaret $f(x, y) = x^2y/2 + g(x^2 - y)$.
- (b) Bivillkoret $f(0, y) = y/2$ är uppfyllt om och endast om $0 + g(-y) = y/2$, dvs om $g(v) = -v/2$, dvs om $f(x, y) = x^2y/2 - (x^2 - y)/2$.

Svar: (a) $f(x, y) = x^2y/2 + g(x^2 - y)$ (b) $f(x, y) = \frac{1}{2}(x^2y - x^2 + y)$.

2. För att hitta stationära punkter sätter vi gradienten av $f(x, y, z) = 2xy + 2xz - y^2 - z^2 - x^3$ till noll:

$$(2y + 2z - 3x^2, 2x - 2y, 2x - 2z) = (0, 0, 0).$$

Detta ger att $x = y = z$ och $2x + 2x - 3x^2 = 0$, alltså $(x, y, z) = (0, 0, 0)$ eller $(\frac{4}{3}, \frac{4}{3}, \frac{4}{3})$. Andraderivatorna är $f''_{xx} = -6x$, $f''_{yy} = f''_{zz} = -2$, $f''_{yz} = 0$ och $f''_{xy} = f''_{xz} = 2$, vilket på vanligt sätt ger de kvadratiska formerna $Q_{(0,0,0)}(h, k, l) = -2k^2 - 2l^2 + 4hk + 4hl = -2(k - h)^2 - 2(l - h)^2 + 4h^2$ (indefinit ty positiv för $(h, k, l) = (1, 1, 1)$ och negativ för $(h, k, l) = (0, 1, 0)$, så origo är en sadelpunkt) respektive $Q_{(\frac{4}{3}, \frac{4}{3}, \frac{4}{3})}(h, k, l) = -8h^2 + Q_{(0,0,0)}(h, k, l) = -2(k - h)^2 - 2(l - h)^2 - 4h^2$ (negativt definit, så $f(\frac{4}{3}, \frac{4}{3}, \frac{4}{3}) = \frac{32}{27}$ är ett lokalt maximum).

Svar: $(\frac{4}{3}, \frac{4}{3}, \frac{4}{3})$ är en lokal maximipunkt för f . Lokala minimipunkter saknas.

3. Det linjära variabelbytet $u = x + 4y - z$, $v = x + y$, $w = y + z$ avbildar D på ett nytt område E som ges av $0 \leq u \leq v \leq w \leq 1$, och eftersom $\frac{d(u,v,w)}{d(x,y,z)} = -4$ så blir $du dv dw = 4 dx dy dz$. Integranden $x - z$ ges i nya variabler av $v - w$ (som förresten är uppenbart negativt inuti E), så vi får $\iiint_D (x - z) dx dy dz = \frac{1}{4} \iiint_E (v - w) du dv dw$, vilket går att räkna ut med upprepad integration på flera sätt, t.ex.

$$\frac{1}{4} \int_{w=0}^1 \left(\int_{v=0}^w \left(\int_{u=0}^v (v - w) du \right) dv \right) dw.$$

Svar: $-1/96$.

4. Linjärt byte $x = u$, $y = v/\sqrt{3}$, följt av övergång till polära koordinater i (u, v) -planet, ger

$$\iint_{\substack{1 \leq x^2 + 3y^2 \leq 3 \\ 0 \leq y \leq x}} xy dx dy = \iint_{\substack{1 \leq u^2 + v^2 \leq 3 \\ 0 \leq v/\sqrt{3} \leq u}} u \frac{v}{\sqrt{3}} \frac{du dv}{\sqrt{3}} = \iint_{\substack{0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{3} \\ 1 \leq \rho \leq \sqrt{3}}} \frac{\rho \cos \varphi \rho \sin \varphi}{3} \rho d\rho d\varphi = \frac{1}{3} \left[\frac{\rho^4}{4} \right]_1^{\sqrt{3}} \left[\frac{\sin^2 \varphi}{2} \right]_0^{\pi/3}.$$

Svar: $1/4$.

5. Sätt $f(x, y, z) = xyz + e^{2x} - y$ och $g(x, y, z) = x + 3y - z$. Då är f och g av klass C^1 , punkten $(0, 1, 2)$ uppfyller villkoren $f = 0$ och $g = 1$, och i den punkten är

$$\frac{d(f, g)}{d(x, y)} = \begin{vmatrix} yz + 2e^{2x} & xz - 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 13 \neq 0,$$

så enligt implicita funktionssatsen definierar villkoren C^1 -funktioner $x(z)$ och $y(z)$ i en omgivning av $(0, 1, 2)$, vilket skulle visas. Per definition gäller $x(2) = 0$ och $y(2) = 1$, och derivatorna kan beräknas med implicit derivering: derivera identiteterna $f(x(z), y(z), z) = 0$ och $g(x(z), y(z), z) = 1$ med avseende på z och sätt $z = 2$, så erhålls ekvationssystemet $4x'(2) - y'(2) = 0$, $x'(2) + 3y'(2) - 1 = 0$, med lösningen $x'(2) = \frac{1}{13}$, $y'(2) = \frac{4}{13}$. Skärningskurvan mellan ytorna har parametreringen $(x, y, z) = (x(s), y(s), s)$, så tangentvektorn $(\frac{dx}{ds}, \frac{dy}{ds}, \frac{dz}{ds})$ i punkten $(0, 1, 2)$ (då $s = 2$) är $(x'(2), y'(2), 1) = (\frac{1}{13}, \frac{4}{13}, 1)$. Tangentlinjens ekvation på parameterform blir alltså $(x, y, z) = (0, 1, 2) + t(1, 4, 13)$. (Man kan även ta fram tangentlinjens riktningsvektor geometriskt, genom att kryssa ytornas normalvektorer: $\nabla f(0, 1, 2) \times \nabla g(0, 1, 2)$.)

Svar: Värdena är $x(2) = 0$, $y(2) = 1$, $x'(2) = \frac{1}{13}$, $y'(2) = \frac{4}{13}$. Tangentlinjen är $(x, y, z) = (0, 1, 2) + t(1, 4, 13)$.

6. Det finns många framkomliga sätt att beräkna denna integral. T.ex. kan man titta på den åttöndel E av kroppen D som ligger i positiva oktanten och ta stavar i y -led. Projektionen av E på (x, z) -planet är en fjärdedel av enhetscirkelskivan, och staven vid en given punkt (x, z) är $0 \leq y \leq 1 - x$. Volymen av D är alltså

$$8 \iiint_E dx dy dz = 8 \iint_{\substack{x^2+z^2 \leq 1 \\ x, z \geq 0}} (1-x) dx dz = 8 \int_{\varphi=0}^{\pi/2} \left(\int_{\rho=0}^1 (1-\rho \cos \varphi) \rho d\rho \right) d\varphi = 2\pi - \frac{8}{3}.$$

Eller så kan man göra skivor; t.ex. är tvärsnittet genom D för fixt x en rektangel med sidorna $2\sqrt{1-x^2}$ i z -led och $2(1-|x|)$ i y -led, så volymen blir

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 4\sqrt{1-x^2} (1-|x|) dx &= 8 \int_0^1 (\sqrt{1-x^2} - x\sqrt{1-x^2}) dx \\ &= 8 \left(\frac{1}{4} (\text{Arean av enhetscirkeln}) + \left[\frac{1}{3} (1-x^2)^{3/2} \right]_0^1 \right) = 2\pi - \frac{8}{3}. \end{aligned}$$

Svar: $2\pi - \frac{8}{3}$.