Linköpings universitet
Matematiska institutionen

Kurskod: TATA69
Provkod: TEN1

Tentamen i TATA69 Flervariabelanalys

2013-10-28 kl. 8–13

Inga hjälpmedel tillåtna (inte heller miniräknare).
8/11/14 poäng med minst 3/4/5 uppgifter med minst 2 poäng (av 3 möjliga) ger betyg 3/4/5. Länk till lösningsskiss finns efter tentamen på kursens hemsida.
Resultatet blir klart inom 10 arbetsdagar. Information om visning ges då på kursens hemsida.

1. Bestäm alla $\mathcal{C}^1$-funktioner $z(x,y)$ (för $x > 0$) som löser differentialekvationen
$$xz'_x + 3yz'_y = \frac{1}{x^4}$$
och uppfyller bivillkoret $z(x,x) = 0$, till exempel genom att göra variabelbytet $u = x$, $v = y/x^3$.

2. Beräkna $\iint_D x^2\,dxdy$, där D är parallellogrammen med hörn i $(x,y) = (1,1)$, $(3,2)$, $(4,5)$ och $(2,4)$.

3. Bestäm samtliga lokala maximi- och minimipunkter till
$$f(x,y,z) = (x+y)^2 - 12yz + (y+z)^3.$$

4. Visa att sambandet $x^2z - yz^5 = 1$ definierar en $\mathcal{C}^1$-funktion $z = z(x,y)$ i en omgivning av $(x,y,z) = (2,3,1)$. Ange $z(2,3)$, $z'_x(2,3)$ och $z'_y(2,3)$.

5. Beräkna $\iiint_D z\,dxdydz$, där D ges av $z \le 0$ (obs!), $x^2+y^2+z^2 \le 1$ och $3z^2 \ge x^2+y^2$.

6. Låt $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3+y^4}{x^2+y^2}, & \text{om } (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & \text{om } (x,y) = (0,0). \end{cases}$

   (a) Beräkna $f'_x(x,y)$ för alla $(x,y) \in \mathbf{R}^2$.

   (b) Avgör om f'_x är kontinuerlig i origo.

   (c) Avgör om f är differentierbar i origo.

Lösningsskisser till tentamen i TATA69 Flervariabelanalys 2013-10-28

1. Med det föreslagna variabelbytet fås enligt kedjeregeln $z'_x = z'_u \cdot 1 + z'_v \cdot (-3y/x^4)$ och $z'_y = z'_u \cdot 0 + z'_v \cdot (1/x^3)$. Insättning av detta i differentialekvationen ger $xz'_u + 0z'_v = 1/x^4$, alltså $z'_u = u^{-5}$. Integration ger $z(u,v) = -u^{-4}/4 + f(v)$, där f är en godtycklig $\mathcal{C}^1$-funktion av en variabel. Alltså är den allmänna lösningen $z(x,y) = -x^{-4}/4 + f(y/x^3)$. Insättning av $y = x$ ger $z(x,x) = -x^{-4}/4 + f(1/x^2)$, som ska vara lika med noll enligt det givna bivillkoret, vilket framtvingar $f(v) = v^2/4$. Återinsättning av den nu kända funktionen f i den allmänna lösningen ger $z(x,y) = -x^{-4}/4 + (y/x^3)^2/4$.

   Svar: $z(x,y) = \dfrac{y^2 - x^2}{4x^6}$.

2. Det affina (dvs. linjär avbildning + konstant) variabelbytet

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} u + \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} v$$

avbildar enhetskvadraten E i uv-planet (dvs. $0 \le u \le 1$, $0 \le v \le 1$) bijektivt på det angivna området D i xy-planet, och

$$dxdy = \left| \det \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \right| dudv = 5\, dudv.$$

Alltså

$$\begin{aligned} \iint_D x^2\, dxdy &= \iint_E (1 + 2u + v)^2 \cdot 5\, dudv \\ &= 5 \int_{u=0}^{1} \left[\tfrac{1}{3}(1 + 2u + v)^3 \right]_{v=0}^{1} du \\ &= \frac{5}{3} \int_{u=0}^{1} \Big((2 + 2u)^3 - (1 + 2u)^3 \Big)\, du \\ &= \frac{5}{3} \cdot \frac{1}{8} \left[(2 + 2u)^4 - (1 + 2u)^4 \right]_{u=0}^{1} \\ &= \frac{5 \cdot (256 - 81 - 16 + 1)}{3 \cdot 8} = \frac{100}{3}. \end{aligned}$$

En annan framkomlig (men rätt jobbig) väg är att dela upp D i tre delområden och integrera direkt. T.ex. såhär, om man delar längs linjerna $x = 2$ och $x = 3$:

$$\int_{x=1}^{2} \left(\int_{y=\frac{x}{2}+\frac{1}{2}}^{3x-2} x^2\, dy \right) dx + \int_{x=2}^{3} \left(\int_{y=\frac{x}{2}+\frac{1}{2}}^{\frac{x}{2}+3} x^2\, dy \right) dx + \int_{x=3}^{4} \left(\int_{y=3x-7}^{\frac{x}{2}+3} x^2\, dy \right) dx$$
$$= \cdots = \frac{85}{24} + \frac{95}{6} + \frac{335}{24} = \frac{100}{3}.$$

(Anm.: Eftersom $x^2 \ge 0$ så är negativa svar uppenbart orimliga, och ger inga poäng.)

Svar: $\dfrac{100}{3}$.

3. Stationära punkter hittas genom att sätta gradienten till noll:

$$\nabla f(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2(x+y) \\ 2(x+y) - 12z + 3(y+z)^2 \\ -12y + 3(y+z)^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Den första ekvationen ger genast $x = -y$, och då ser man från de två andra ekvationerna att $z = y$ samt $-12y + 3(y + y)^2 = 0$; därmed erhålls $y = 0$ eller $y = 1$, så de stationära punkterna är $(0, 0, 0)$ och $(-1, 1, 1)$.

Vi tar fram den kvadratiska formen i Taylorutvecklingen kring respektive punkt. Andraderivatorna är $f''_{xx} = f''_{xy} = 2$, $f''_{xz} = 0$, $f''_{yy} = 2 + 6(y + z)$, $f''_{yz} = -12 + 6(y + z)$ och $f''_{zz} = 6(y + z)$. Alltså fås i origo $\frac{1}{2}Q_{(0,0,0)}(h, k, l) = h^2 + 2hk + k^2 - 12kl$. Denna form är indefinit, vilket man kan motivera på lite olika sätt. T.ex. ger kvadratkomplettering med avseende på k att $\frac{1}{2}Q = (k + h - 6l)^2 - (h - 6l)^2 + h^2$, och om man har gjort på detta sätt så räcker det med att peka på koefficienternas tecken $+-+$ för att motivera att Q är indefinit. (Obs. att detta argument förutsätter att uttrycket är *systematiskt* kvadratkompletterat, dvs. har rätt slags "trappstruktur". Har man gjort på något annat sätt krävs det att man motiverar genom att ange punkter där $Q > 0$ respektive $Q < 0$.) Ett annat sätt är att skriva $\frac{1}{2}Q = (h + k)^2 - 12kl$ (vilket f.ö. är vad man ser direkt om man i $f(h, k, l)$ helt enkelt stryker tredjegradstermerna), och då är det enkelt att hitta lämpliga (h, k, l) som visar att Q är indefinit; t.ex. ger $(h, k, l) = (1, 0, 0)$ ett positivt värde på Q och $(h, k, l) = (-1, 1, 1)$ ett negativt värde. Slutsatsen blir hur som helst att origo är en sadelpunkt för f.

I den andra punkten har vi $\frac{1}{2}Q_{(-1,1,1)}(h, k, l) = h^2 + 2hk + 7k^2 + 6l^2 = (h + k)^2 + 6k^2 + 6l^2$, en positivt definit kvadratisk form (ty tecknen är $+++$ i ett systematiskt kvadratkompletterat uttryck). Funktionen har alltså lokalt minimum $f(-1, 1, 1) = -4$ i denna punkt.

Svar: $(x, y, z) = (-1, 1, 1)$ är en lokal minimipunkt. Lokala maximipunkter saknas.

4. Funktionen $F(x, y, z) = x^2 z - yz^5$ är av klass $\mathcal{C}^1$, punkten $(x, y, z) = (2, 3, 1)$ uppfyller det givna sambandet $F(x, y, z) = 1$, och z-derivatan $F'_z(x, y, z) = x^2 - 5yz^4$ är *skild från noll* i den punkten: $F'_z(2, 3, 1) = -11 \neq 0$. Förutsättningarna i implicita funktionssatsen är därmed uppfyllda, och den säger precis det som skulle visas, dvs. att sambandet lokalt definierar z som $\mathcal{C}^1$-funktion av x och y. Per definition gäller $z(2, 3) = 1$, och derivatorna är $z'_x(2, 3) = -F'_x(2, 3, 1)/F'_z(2, 3, 1) = 4/11$ och $z'_y(2, 3) = -F'_y(2, 3, 1)/F'_z(2, 3, 1) = -1/11$ (se Persson–Böiers s. 151).

5. Innan man ens börjar räkna bör man väl lägga märke till att svaret måste bli *negativt*, eftersom integranden $f(x, y, z) = z$ är negativ inuti D – en av olikheterna som definierar D är ju just $z \leq 0$. (Positiva svar är alltså uppenbart orimliga, och ger inga poäng.)

   Området D är en "uppochnedvänd glasstrut" – skärningen mellan enhetsklotet och nedre halvan av en solid dubbelkon (ett "timglas") med spets i origo. I rymdpolära koordinater beskrivs D av olikheterna $0 \leq r \leq 1$, $0 \leq \phi < 2\pi$ och $2\pi/3 \leq \theta \leq \pi$. (Gränserna för θ inses lättast genom att rita kroppen "sedd från sidan": ekvationerna $z = \pm\sqrt{\frac{1}{3}(x^2 + y^2)}$, som definierar dubbelkonens mantelyta, motsvarar i ett ρz-koordinatsystem linjerna $z = \pm\rho/\sqrt{3}$, som har vinklarna $\theta = \pi/3$ resp. $\theta = 2\pi/3$ mot positiva z-axeln.) Det rätblock i $r\theta\phi$-rummet som ovanstående olikheter definierar döper vi till E, och integralen blir då

$$\begin{aligned}
\iiint_D z\,dxdydz &= \iiint_E r\cos\theta \cdot r^2 \sin\theta\,drd\theta d\phi \\
&= \left(\int_0^{2\pi} d\phi\right)\left(\int_0^1 r^3\,dr\right)\left(\int_{2\pi/3}^{\pi} \sin\theta\cos\theta\,d\theta\right) \\
&= 2\pi \cdot \tfrac{1}{4} \cdot \left[\tfrac{1}{2}\sin^2\theta\right]_{2\pi/3}^{\pi} = -\frac{3\pi}{16}.
\end{aligned}$$

Alternativt kan man integrera med hjälp av stavar i z-led, från sfären (den nedre ytan) till konen (den övre ytan). Områdets projektion F på xy-planet ges av $\frac{1}{3}(x^2+y^2) \leq 1-x^2-y^2$, alltså $x^2+y^2 \leq \frac{3}{4}$ (en cirkelskiva med radien $\sqrt{3}/2$, så dubbelintegralen över F beräknas lämpligen med planpolära koordinater). Med denna metod får man

$$\begin{aligned}
\iiint_D z\,dxdydz &= \iint_F \left(\int_{z=-\sqrt{1-x^2-y^2}}^{-\sqrt{\frac{1}{3}(x^2+y^2)}} z\,dz \right) dxdy \\
&= \frac{1}{2} \iint_F \left(\tfrac{1}{3}(x^2+y^2) - (1-x^2-y^2) \right) dxdy \\
&= \frac{1}{2} \left(\int_0^{2\pi} d\phi \right) \left(\int_0^{\sqrt{3}/2} \left(\tfrac{4}{3}\rho^2 - 1 \right) \rho\,d\rho \right) \\
&= \tfrac{1}{2} \cdot 2\pi \cdot \left[\tfrac{1}{3}\rho^4 - \tfrac{1}{2}\rho^2 \right]_0^{\sqrt{3}/2} = -\frac{3\pi}{16}.
\end{aligned}$$

Ett tredje sätt är göra skivor parallella med xy-planet. Tvärsnittet D_z för fixt $z \in [-1, 0]$ är en cirkel med radie

$$\rho(z) = \begin{cases} \sqrt{1-z^2}, & \text{om } -1 \leq z \leq -\frac{1}{2} \text{ (klotet)}, \\ \sqrt{3z^2} = \sqrt{3}|z|, & \text{om } -\frac{1}{2} \leq z \leq 0 \text{ (konen)}, \end{cases}$$

så integralen blir

$$\begin{aligned}
\iiint_D z\,dxdydz &= \int_{z=-1}^{0} \left(\iint_{D_z} z\,dxdy \right) dz = \int_{-1}^{0} z\,\mathrm{Area}(D_z)\,dz \\
&= \int_{-1}^{0} z\pi\rho(z)^2\,dz = \int_{-1}^{-1/2} z\,\pi(1-z^2)dz + \int_{-1/2}^{0} z\,\pi 3z^2 dz \\
&= -\frac{9\pi}{64} - \frac{3\pi}{64} = -\frac{3\pi}{16}.
\end{aligned}$$

Svar: $-3\pi/16$.

6. (a) För $(x,y) \neq (0,0)$ är det bara att derivera $(x^3+y^4)/(x^2+y^2)$ som vanligt med kvotregeln. (Derivatans värde i en viss punkt $(x,y) \neq (0,0)$ avgörs ju bara av f:s värden i en godtyckligt liten omgivning av (x,y), och där har f:s separat definierade värde i origo inget inflytande.)

   För $(x,y) = (0,0)$ måste vi däremot falla tillbaka på definitionen av partiell derivata. Enligt förutsättning ges f:s värden längs x-axeln av

$$f(x,0) = \begin{cases} \dfrac{x^3+0}{x^2+0}, & \text{om } x \neq 0, \\ 0, & \text{om } x = 0, \end{cases}$$

   alltså av $f(x,0) = x$, rätt och slätt (ty denna formel ger rätt värde både för $x \neq 0$ och $x = 0$). Och derivatan av funktionen $f(x,0) = x$ är 1 för alla x, speciellt för $x = 0$, vilket betyder att $f'_x(x,0) = 1$ för alla x, speciellt $f'_x(0,0) = 1$.

   Svar: $f'_x(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^4+3x^2y^2-2xy^4}{(x^2+y^2)^2}, & \text{om } (x,y) \neq (0,0), \\ 1, & \text{om } (x,y) = (0,0). \end{cases}$

(b) För att undersöka om f'_x är kontinuerlig i origo så måste vi se om värdet $f'_x(0,0) = 1$ överensstämmer med vad de omkringliggande punkterna ”tycker” att värdet i origo borde vara. Med andra ord: vi måste undersöka om $\frac{x^4+3x^2y^2-2xy^4}{(x^2+y^2)^2}$ har gränsvärdet 1 då $(x,y) \to (0,0)$. Men det har det *inte*; faktum är att gränsvärde saknas, eftersom $f'_x(x,0) = 1$ för $x \neq 0$ och $f'_x(0,y) = 0$ för $y \neq 0$. (Två olika nivåkurvor $f'_x = 1$ och $f'_x = 0$ försöker alltså mötas i origo, vilket innebär att de omkringliggande punkterna över huvud taget inte kan ”enas” om vad f'_x borde ha för värde i origo. Det spelar alltså ingen roll att $f'_x(0,0)$ blev just lika med 1; inget annat värde hade heller kunnat göra f'_x kontinuerlig.)

Svar: Nej, funktionen f'_x är *inte* kontinuerlig i origo.

(Däremot är det såklart sant att f'_x är kontinuerlig i resten av $\mathbf{R}^2$, ty f'_x är där lika med en rationell funktion med nollskild nämnare.)

(c) För att undersöka differentierbarhet behöver vi även veta vad $f'_y(0,0)$ är, eftersom differentierbarhet i origo innebär att de partiella derivatorna existerar där och att

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(h,k) - h\,f'_x(0,0) - k\,f'_y(0,0)}{\sqrt{h^2+k^2}} = 0.$$

Som i (a) finner vi att $f(0,y) = y^2$ (både för $y \neq 0$ och $y = 0$), vilket har derivatan $2y$, som är noll då $y = 0$. Alltså $f'_y(0,0) = 0$. Med detta värde till hands kan vi undersöka om ovanstående gränsvärde existerar och är lika med noll: för $(h,k) \neq (0,0)$ har vi

$$\frac{f(h,k) - h\,f'_x(0,0) - k\,f'_y(0,0)}{\sqrt{h^2+k^2}} = \frac{\dfrac{h^3+k^4}{h^2+k^2} - h\cdot 1 - k\cdot 0}{\sqrt{h^2+k^2}} = \frac{k^4 - hk^2}{(h^2+k^2)^{3/2}},$$

men detta uttryck *saknar* gränsvärde (t.ex. är det noll då $k = 0$, medan $(h,k) = (t,t)$ med $t > 0$ ger $(t^4 - t^3)/(2t^2)^{3/2} = (t-1)/2^{3/2} \to -2^{-3/2}$ då $t \to 0^+$).

Svar: Nej, funktionen f är *inte* differentierbar i origo.