Linköpings universitet
Matematiska institutionen

**Kurskod: TATA69**
**Provkod: TEN1**

# Tentamen i TATA69 Flervariabelanalys

**2013-08-22 kl 14–19**

Inga hjälpmedel tillåtna (inte heller miniräknare).
8/11/14 poäng med minst 3/4/5 uppgifter med minst 2 poäng (av 3 möjliga) ger betyg 3/4/5. Länk till lösningsskiss finns efter tentamen på kursens hemsida.
Resultatet blir klart inom 10 arbetsdagar. Information om visning ges då på kursens hemsida.

1. Bestäm de tangentplan till ytan $x^2 + y + z^3 = 12$ som är parallella med planet $6x - y - 3z = 0$.

2. (a) Antag att $f(x, y)$ är av klass $\mathcal{C}^2$. Uttryck $f''_{xy}$ i de nya variablerna

$$\begin{cases} u = xy^2 \\ v = y \end{cases} \quad \text{där } y > 0. \qquad (2\text{p})$$

   (b) Vad menas med att $f$ är av klass $\mathcal{C}^2$? (1p)

3. Beräkna $\displaystyle\int_0^1 \left( \int_{2x}^2 \frac{dy}{1 + y^4} \right) x^2 \, dx$.

4. Bestäm samtliga lokala maximi- och minimipunkter till

$$f(x, y, z) = \frac{x^2}{2} + z^2 + xy - xz + \frac{2}{3}y^3.$$

5. Beräkna volymen av den kropp i $\mathbf{R}^3$ som ges av olikheterna

$$\begin{cases} x + y + z \leq 2, \\ x - y^2 + z \geq 0, \\ x \geq 0,\ y \geq 0,\ z \geq 0. \end{cases}$$

6. Undersök $\displaystyle\iint_D \frac{x - y}{(x + y)^3} \, dxdy$ där $D$ ges av $x > 0$ och $y > 0$.

**Lösningsskisser till tentamen i TATA69 Flervariabelanalys 2013-08-22**

1. Sätt $F(x,y,z) = x^2+y+z^3$; då är den givna ytan nivåytan $F(x,y,z) = 12$. Tangentplanet till denna yta i en punkt $(a,b,c)$ på ytan är parallellt med planet $6x - y - 3z = 0$ precis då $\nabla F(a,b,c) \parallel (6,-1,-3)$ och $F(a,b,c) = 12$, d.v.s. precis då

$$(2a, 1, 3c^2) \parallel (6,-1,-3) \quad \text{och} \quad a^2 + b + c^3 = 12.$$

Det första villkoret ger $2a = -6$ och $3c^2 = 3$, d.v.s. $a = -3$ och $c = \pm 1$, som insatt i det andra ger $b = 3 \mp 1$, och därmed tangeringspunkterna $(-3,2,1)$ och $(-3,4,-1)$, med tangentplanen $6x - y - 3z = -23$ respektive $6x - y - 3z = -19$.

Svar: Planen är $6x - y - 3z = -23$ och $6x - y - 3z = -19$.

2. (a) Kedjeregeln ger först $f'_x = f'_u u'_x + f'_v v'_x = y^2 f'_u$ och sedan

$$\begin{aligned} f''_{xy} &= (f'_x)'_y = (y^2 f'_u)'_y = 2y f'_u + y^2 (f'_u)'_y = 2y f'_u + y^2 (f''_{uu} u'_y + f''_{uv} v'_y) \\ &= 2y f'_u + y^2 (2xy f''_{uu} + f''_{uv}) = 2y f'_u + 2xy^3 f''_{uu} + y^2 f''_{uv} \\ &= 2v f'_u + 2uv f''_{uu} + v^2 f''_{uv}. \end{aligned}$$

(b) De partiella andraderivatorna skall existera och vara kontinuerliga.

3. Integrationsområdet $0 \le x \le 1$, $2x \le y \le 2$ kan skrivas $0 \le y \le 2$, $0 \le x \le y/2$, så

$$\begin{aligned} \int_0^1 \left( \int_{2x}^2 \frac{dy}{1+y^4} \right) x^2\,dx &= \int_0^2 \left( \int_0^{y/2} x^2\,dx \right) \frac{dy}{1+y^4} \\ &= \frac{1}{24} \int_0^2 \frac{y^3\,dy}{1+y^4} = \frac{1}{24} \left[ \frac{\ln(1+y^4)}{4} \right]_0^2 = \frac{\ln 17}{96}. \end{aligned}$$

4. Stationära punkter för $f$ fås ur ekvationssystemet $f'_x = x + y - z = 0$, $f'_y = x + 2y^2 = 0$, $f'_z = 2z - x = 0$. Den tredje ekvationen ger genast $x = 2z$, och den första ger sedan $y = -z$ varpå den andra ger $2z + 2z^2 = 0$, alltså $z = 0$ eller $z = -1$. Vi får således två stationära punkter: $(0,0,0)$ och $(-2,1,-1)$.

Andraderivatorna blir $f''_{xx} = 1$, $f''_{xy} = 1$, $f''_{xz} = -1$, $f''_{yy} = 4y$, $f''_{yz} = 0$, $f''_{zz} = 2$.

I punkten $(0,0,0)$ är $f''_{yy} = 0$, så vi får den kvadratiska formen

$$\begin{aligned} Q(h,k,l) &= \begin{pmatrix} h & k & l \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} & f''_{xz} \\ f''_{xy} & f''_{yy} & f''_{yz} \\ f''_{xz} & f''_{yz} & f''_{zz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h & k & l \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h \\ k \\ l \end{pmatrix} \\ &= h^2 + 2hk - 2hl + 2l^2 = (h + k - l)^2 + (l + k)^2 - 2k^2, \end{aligned}$$

som är indefinit: exempelvis är $Q(1,0,0) = 1 > 0$ medan $Q(2,-1,1) = -2 < 0$.

I punkten $(-2,1,-1)$ blir i stället $f''_{yy} = 4$ och $Q(h,k,l) = h^2 + 2hk - 2hl + 4k^2 + 2l^2 = (h + k - l)^2 + (l + k)^2 + 2k^2$, som är positivt definit: $Q(h,k,l) \ge 0$ för alla $(h,k,l)$, och $Q(h,k,l) = 0$ endast om $h + k - l = 0$, $l + k = 0$ och $k = 0$, d.v.s. endast om $(h,k,l) = (0,0,0)$. Alltså är punkten $(x,y,z) = (-2,1,-1)$ en lokal minimipunkt för $f$.

Svar: $(-2,1,-1)$ är en lokal minimipunkt. Lokala maximipunkter saknas.

5. För fixt $y \geq 0$ får vi tvärsnittet $D_y$, som kan skrivas $y^2 \leq x + z \leq 2 - y$, $x \geq 0$, $z \geq 0$, och som är icketomt precis då $0 \leq y \leq 1$. För dessa $y$ är $D_y$ en halv kvadrat med sidlängd $2 - y$ men med en halv kvadrat med sidlängd $y^2$ borttagen, så kroppens volym $V$ blir

$$V = \int_0^1 \text{area}(D_y)\,dy = \int_0^1 \frac{(2-y)^2 - (y^2)^2}{2}\,dy = \left[-\frac{(2-y)^3}{6} - \frac{y^5}{10}\right]_0^1 = \frac{16}{15}.$$

6. Integralen är generaliserad och integranden $f(x,y) = (x-y)/(x+y)^3$ växlar tecken på $D$. Enligt definitionen på generaliserad dubbelintegral är därför $\iint_D f(x,y)\,dxdy$ konvergent om och endast om $\iint_D |f(x,y)|\,dxdy$ är konvergent. Eftersom $|f(x,y)| \geq 0$ får vi använda upprepad integration på $\iint_D |f(x,y)|\,dxdy$, och vi får, tack vare symmetri i integrand och område,

$$\begin{aligned}\iint_D |f(x,y)|\,dxdy &= \int_0^\infty \left(\int_0^\infty \frac{|x-y|\,dy}{(x+y)^3}\right) dx = 2\int_0^\infty \left(\int_0^x \frac{(x-y)\,dy}{(x+y)^3}\right) dx \\ &= 2\int_0^\infty \left[\frac{y}{(x+y)^2}\right]_{y=0}^{y=x} dx = \int_0^\infty \frac{dx}{2x},\end{aligned}$$

som är divergent ($= +\infty$); alltså är $\iint_D f(x,y)\,dxdy$ divergent.

Svar: Integralen är divergent.