

## Tentamen i TATA69 Flervariabelanalys

2013-01-10 kl 8–13

Inga hjälpmedel tillåtna (inte heller miniräknare).

8/11/14 poäng med minst 3/4/5 uppgifter med minst 2 poäng (av 3 möjliga) ger betyg 3/4/5. Länk till lösningsskiss finns efter tentamen på kursens hemsida.

Resultatet blir klart inom 10 arbetsdagar. Information om visning ges då på kursens hemsida.

1. Beräkna

$$\iint_D (y - x) \, dx dy,$$

där  $D$  är triangeln med hörn i  $(0, 0)$ ,  $(4, 1)$  och  $(2, 2)$ .

2. Bestäm alla punkter  $P$  på kurvan  $x^3 + 3y^2 = 12$  sådana att kurvans normallinje i  $P$  går genom origo.

3. Beräkna

$$\iiint_D x \, dx dy dz,$$

där  $D$  ges av  $4x^2 + y^2 + z^2 \leq 4$ ,  $x \geq 0$ ,  $y \geq 0$  och  $z \geq 0$ .

4. Visa att ekvationen

$$3y^2 - 3yz + 2x^3 + z^3 = 19$$

i en omgivning till punkten  $(x, y, z) = (1, 2, -1)$  definierar en  $\mathcal{C}^1$ -funktion  $z = z(x, y)$ . Beräkna  $z(1, 2)$ ,  $z'_x(1, 2)$  och  $z'_y(1, 2)$ , samt bestäm tangentplanet till funktionsytan i punkten  $(1, 2, -1)$ .

5. Bestäm samtliga lokala maximi- och minimipunkter till

$$f(x, y, z) = y^2 + z^2 + 2x^3 - x^2y.$$

6. Kroppen  $K$  ges av  $x^2 + y^2 + z^2 \leq 8$  och  $2z \geq x^2 + y^2$ . Bestäm tyngdpunktens  $z$ -koordinat

$$z_T = \frac{\iiint_K z \, dx dy dz}{\iiint_K dx dy dz}.$$

## Lösningsskisser till tentamen i TATA69 Flervariabelanalys 2013-01-10

1. Enklast är antagligen att göra det linjära variabelbytet

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} u + \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} v,$$

med funktionaldeterminanten  $4 \cdot 2 - 1 \cdot 2 = 6$ . Triangeln  $D$  motsvaras då i  $(u, v)$ -planet av triangeln  $E$  med hörn i  $(u, v) = (0, 0)$ ,  $(1, 0)$  och  $(0, 1)$ . Integralen blir

$$\begin{aligned} \iint_D (y - x) \, dx \, dy &= \iint_E ((u + 2v) - (4u + 2v)) \cdot 6 \, du \, dv \\ &= 6 \iint_E (-3u) \, du \, dv = -18 \int_{u=0}^1 \left( \int_{v=0}^{1-u} u \, dv \right) du \\ &= -18 \int_{u=0}^1 (u - u^2) \, du = -18 \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) = -3. \end{aligned}$$

**Svar:**  $-3$ .

2. Låt  $f(x, y) = x^3 + 3y^2$ . Vi söker de punkter  $P = (a, b)$  som ligger på nivåkurvan  $f = 12$  och som är sådana att gradienten  $\nabla f(a, b) = (3a^2, 6b)$  (som ju är riktningsvektor för normallinjen genom  $P$ ) är parallell med vektorn från origo till  $P$  (alltså parallell med vektorn  $(a, b)$ ). Dessa krav ger två villkor för våra två obekanta  $a$  och  $b$ :

$$a^3 + 3b^2 = 12 \quad \text{och} \quad 0 = \begin{vmatrix} 3a^2 & a \\ 6b & b \end{vmatrix} = 3ab(a - 2).$$

De fem lösningarna till detta ekvationssystem ger svaret.

**Svar:**  $(\sqrt[3]{12}, 0)$ ,  $(0, \pm 2)$ ,  $(2, \pm 2/\sqrt{3})$ .

3. Bytet  $(u, v, w) = (2x, y, z)$  ger ett nytt område  $E$  som definieras av  $u^2 + v^2 + w^2 \leq 4$ ,  $u \geq 0$ ,  $v \geq 0$ ,  $w \geq 0$ , alltså ett åttondels klot. Efter byte till rymdpolariska koordinater i  $(u, v, w)$ -rummet fås sedan området  $F$  som ges av  $0 \leq r \leq 2$ ,  $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ ,  $0 \leq \phi \leq \frac{\pi}{2}$ . Alltså:

$$\begin{aligned} \iiint_D x \, dx \, dy \, dz &= \iiint_E \frac{1}{2} u \cdot \frac{1}{2} \, du \, dv \, dw = \frac{1}{4} \iiint_F (r \cos \phi \sin \theta) r^2 \sin \theta \, dr \, d\theta \, d\phi \\ &= \frac{1}{4} \int_0^2 r^3 \, dr \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 \theta \, d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos \phi \, d\phi = \frac{1}{4} \cdot \frac{2^4}{4} \cdot \frac{\pi}{4} \cdot 1 = \frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

(Man kan även utnyttja att  $\iiint_E u \, du \, dv \, dw = \iiint_E w \, du \, dv \, dw$  av symmetriskäl, så får man istället den aningen enklare integralen  $\frac{1}{4} \iiint_F (r \cos \theta) r^2 \sin \theta \, dr \, d\theta \, d\phi$  i sista steget.)

**Svar:**  $\pi/4$ .

4. Låt  $f(x, y, z) = 3y^2 - 3yz + 2x^3 + z^3$ . Eftersom  $f \in \mathcal{C}^1(\mathbf{R}^3)$ ,  $f(1, 2, -1) = 19$  och  $f'_z(1, 2, -1) = -3 \cdot 2 + 3(-1)^2 \neq 0$ , så definierar ekvationen  $f(x, y, z) = 19$  enligt implicita funktionssatsen en  $\mathcal{C}^1$ -funktion  $z = z(x, y)$  i en omgivning av  $(1, 2, -1)$ . Per definition är  $z(1, 2) = -1$ , och eftersom  $f(x, y, z(x, y)) = 19$  för alla  $(x, y)$  i en omgivning av  $(1, 2)$  så är (i denna omgivning)  $\frac{\partial}{\partial x} (f(x, y, z(x, y))) = 0$ , dvs

$$f'_x(x, y, z(x, y)) + f'_z((x, y, z(x, y)))z'_x(x, y) = 0,$$

så att

$$z'_x(1, 2) = -\frac{f'_x(1, 2, -1)}{f'_z(1, 2, -1)} = -\frac{6}{-3} = 2,$$

och på liknande sätt

$$z'_y(1, 2) = -\frac{f'_y(1, 2, -1)}{f'_z(1, 2, -1)} = -\frac{15}{-3} = 5.$$

Tangentplanetns ekvation är därmed  $z = -1 + 2(x - 1) + 5(y - 2)$ , dvs  $2x + 5y - z = 13$ . (Alternativt sätt att ta fram tangentplanetns ekvation: använd direkt att normalvektorn  $\nabla f(1, 2, -1) = (6, 15, -3) = 3(2, 5, -1)$  ger koefficienterna för  $x$ ,  $y$  och  $z$ .)

**Svar:** Se ovan.

5. Stationära punkter ges av  $\nabla f(x, y, z) = (6x^2 - 2xy, 2y - x^2, 2z) = (0, 0, 0)$ , dvs  $(x, y, z) = (0, 0, 0)$  eller  $(6, 18, 0)$ . Den kvadratiske formen i origo är  $Q(h, k, l) = 2(k^2 + l^2)$ , vilket inte säger oss något (eftersom  $Q$  är positiv semidefinit); däremot antar ju  $f(x, 0, 0) = 2x^3$  såväl positiva som negativa värden godtyckligt nära  $x = 0$ , vilket direkt visar att origo inte är någon lokal extrempunkt.

Den kvadratiske formen i  $(6, 18, 0)$  är  $Q(h, k, l) = 36h^2 + 2k^2 + 2l^2 - 24hk = 2l^2 + 2(k - 6h)^2 - 36h^2$ . Teckenväxlingen  $++-$  visar att  $Q$  är indefinit, t.ex. är ju  $Q(1, 6, 0) = 0 + 0 - 36 < 0$  och  $Q(0, 0, 1) = 2 + 0 + 0 > 0$ . Inte heller denna punkt är alltså någon lokal extrempunkt.

**Svar:** Funktionen saknar lokala extrempunkter.

6. I cylinderkoordinater  $(\rho, \phi, z)$  beskrivs kroppen  $K$  av  $\rho^2 + z^2 \leq 8$  och  $z \geq \frac{1}{2}\rho^2$ . Eftersom  $\phi$  inte förekommer här så är kroppen rotations-symmetrisk kring  $z$ -axeln, och man kan lätt göra sig en bild av  $K$  genom att tänka sig den mängd i  $(\rho, z)$ -planet som avgränsas av cirkeln  $\rho^2 + z^2 = 8$  och parabeln  $z = \frac{1}{2}\rho^2$ , och rotera denna mängd kring  $z$ -axeln. Notera att cirkeln och parabeln skär varandra i punkten  $\rho = z = 2$ , vilket man behöver veta när man ska ställa upp gränserna för integralerna.

Om vi delar upp kroppen i cirkulära skivor  $D_z$  parallella med  $(x, y)$ -planet så får vi

$$\iiint_K z \, dx \, dy \, dz = \int_{z=0}^{\sqrt{8}} z \, \text{area}(D_z) \, dz = \int_0^2 z \cdot 2z\pi \, dz + \int_2^{\sqrt{8}} z \cdot (8 - z^2)\pi \, dz,$$

och motsvarande för  $\iiint_K dx \, dy \, dz$ .

Om vi istället räknar med stavar parallella med  $z$ -axeln så får vi

$$\iiint_K z \, dx \, dy \, dz = \iint_{x^2+y^2 \leq 2^2} \left( \int_{z=(x^2+y^2)/2}^{\sqrt{8-x^2-y^2}} z \, dz \right) dx \, dy,$$

och motsvarande för  $\iiint_K dx \, dy \, dz$ .

I båda fallen erhålls

$$z_T = \frac{28\pi/3}{(32\sqrt{2} - 28)\pi/3} = \frac{7}{8\sqrt{2} - 7} (\approx 1,62).$$

**Svar:**  $\frac{7}{8\sqrt{2} - 7}$ .