

Tentamen i TATA69 Flervariabelanalys

2012-08-16 kl 14–19

Inga hjälpmedel tillåtna (inte heller miniräknare).

8/11/14 poäng med minst 3/4/5 uppgifter med minst 2 poäng (av 3 möjliga) ger betyg 3/4/5. Länk till lösningsskiss finns efter tentamen på kursens hemsida.

Resultatet blir klart inom 10 arbetsdagar. Information om visning ges då på kursens hemsida.

1. Bestäm samtliga lokala maximi- och minimipunkter till

$$f(x, y) = 4xy - 2y^2 - x^4.$$

2. Bestäm de tangentplan till ytan $x^2 + 2y^2 + z^2 + 2xy = 24$ som är parallella med planet $x + 3y + z = 0$.

3. Beräkna volymen av den kropp i \mathbf{R}^3 som begränsas av ytorna

$$z = x^2 + 2y^2 \quad \text{och} \quad 2x + z = 2.$$

4. Bestäm alla \mathcal{C}^1 -lösningar $z(x, y)$ till differentialekvationen

$$2xz'_x - yz'_y = y, \quad x > 0, \quad y > 0$$

under bivillkoret $z(x, x) = 0$ genom att t.ex. göra variabelbytet $u = xy^2$, $v = \frac{1}{y}$.

5. Bestäm alla \mathcal{C}^1 -lösningar $u(x, y, z)$ respektive $u(x, y)$ till följande differentialekvationssystem:

$$(a) \begin{cases} u'_x = 1 + y \cos xy \\ u'_y = ze^{yz} + x \cos xy \\ u'_z = 1 + ye^{yz} \end{cases} \quad \text{med bivillkoret } u(0, 0, 0) = 0.$$

$$(b) \begin{cases} u'_x = e^{x^2}(1 + y^2) \\ u'_y = \frac{y}{x}e^{x^2} \end{cases}, \quad x > 0, \quad \text{med bivillkoret } u(1, 0) = 0.$$

6. Beräkna

$$\iiint_D y e^{-(x^2+3y^2+4z^2)^2} dx dy dz,$$

där D ges av $y \geq |x|$ och $z \geq 0$.

Lösningsskisser till tentamen i TATA69 Flervariabelanalys 2012-08-16

1. De stationära punkterna fås ur $f'_x = 4y - 4x^3 = 0$ och $f'_y = 4x - 4y = 0$. Den andra ekvationen ger genast $y = x$, som insatt i den första ger $4x - 4x^3 = 0$, d.v.s. $x = 0$ eller $x = \pm 1$, och vi får därmed totalt tre stationära punkter: $(0, 0)$, $(1, 1)$ och $(-1, -1)$. Andraderivatorna blir $f''_{xx} = -12x^2$, $f''_{xy} = 4$ och $f''_{yy} = -4$.

I $(0, 0)$ blir $f''_{xx} = 0$ och den kvadratiske formen

$$\begin{aligned} Q(h, k) &= \begin{pmatrix} h & k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} \\ f''_{xy} & f''_{yy} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h & k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 4 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} \\ &= 8hk - 4k^2 = -4(k - h)^2 + 4h^2, \end{aligned}$$

som är indefinit eftersom t.ex. $Q(1, 1) = 4 > 0$ medan $Q(0, 1) = -4 < 0$, så punkten $(0, 0)$ är ingen lokal extrempunkt för f .

I $(1, 1)$ och $(-1, -1)$ blir $f''_{xx} = -12$, och vi får i båda punkterna den kvadratiske formen

$$Q(h, k) = -12h^2 + 8hk - 4k^2 = -4(k - h)^2 - 8h^2,$$

som är negativt definit eftersom $Q(h, k) \leq 0$ för alla (h, k) och $Q(h, k) = 0$ endast om $k - h = 0$ och $h = 0$, d.v.s. endast om $(h, k) = (0, 0)$. Således är punkterna $(1, 1)$ och $(-1, -1)$ lokala maximipunkter för f .

Svar: $(1, 1)$ och $(-1, -1)$ är lokala maximipunkter. Lokala minimipunkter saknas.

2. Sätt $F(x, y, z) = x^2 + 2y^2 + z^2 + 2xy$; då är den givna ytan nivåytan $F(x, y, z) = 24$. Tangentplanet till denna yta i en punkt (a, b, c) på ytan är parallellt med det givna planet, $x + 3y + z = 0$, precis då $\nabla F(a, b, c) \parallel (1, 3, 1)$ och $F(a, b, c) = 24$, d.v.s. precis då $(2a + 2b, 2a + 4b, 2c) \parallel (1, 3, 1)$ och $a^2 + 2b^2 + c^2 + 2ab = 24$. Det första villkoret ger $6a + 6b = 2a + 4b = 6c$, d.v.s. $b = -2a$ och $c = -a$, som insatt i det andra ger $6a^2 = 24$, d.v.s. $a = \pm 2$, och därmed tangeringspunkterna $(2, -4, -2)$ och $(-2, 4, 2)$, med tangentplanen $x + 3y + z = -12$ respektive $x + 3y + z = 12$.

Svar: Planen är $x + 3y + z = 12$ och $x + 3y + z = -12$.

3. Ytorna skär varandra längs kurvan $x^2 + 2y^2 = 2 - 2x$, $z = 2 - 2x$, vars projektion på xy -planet är ellipsen $(x + 1)^2 + 2y^2 = 3$. Den givna kroppen D har projektionen \tilde{D} i xy -planet som ges av $(x + 1)^2 + 2y^2 \leq 3$, så med stavlar i z -led får vi, med linjärt byte $u = x + 1$, $v = \sqrt{2}y$ och ny mängd $E : u^2 + v^2 \leq 3$ och $dudv = \sqrt{2} dx dy$, följt av planpolärt byte $u = \rho \cos \varphi$, $v = \rho \sin \varphi$ med ny mängd $F : 0 \leq \rho \leq \sqrt{3}$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ och $dudv = \rho d\rho d\varphi$,

$$\begin{aligned} V &= \iint_{\tilde{D}} ((2 - 2x) - (x^2 + 2y^2)) dx dy = \iint_E (3 - u^2 - v^2) \frac{dudv}{\sqrt{2}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^{\sqrt{3}} \left(\int_0^{2\pi} (3 - \rho^2) \rho d\varphi \right) d\rho = \frac{2\pi}{\sqrt{2}} \left[\frac{(3 - \rho^2)^2}{2 \cdot (-2)} \right]_0^{\sqrt{3}} = \frac{9\pi}{2\sqrt{2}}. \end{aligned}$$

4. Kedjeregeln ger $z'_x = z'_u u'_x + z'_v v'_x = y^2 z'_u$ och $z'_y = z'_u u'_y + z'_v v'_y = 2xy z'_u - z'_v / y^2$, och insättning i differentialekvationen ger $z'_v / y^2 = 1$ för $x > 0$, $y > 0$, d.v.s. $z'_v = y^2 = 1/v^2$ för $u > 0$, $v > 0$, som integrerad ger $z = -1/v + g(u) = -y + g(xy^2)$, där g är en C^1 -funktion av en variabel. Bivillkoret ger nu $0 = z(x, x) = -x + g(x^3)$ då $x > 0$, så $g(t) = \sqrt[3]{t}$ för $t > 0$, och därmed får vi till sist $z(x, y) = -y + \sqrt[3]{xy^2}$ då $x > 0$ och $y > 0$.

Svar: $z(x, y) = \sqrt[3]{xy^2} - y$.

5. (a) Integration av ekvation 1 m.a.p. x ger $u = x + \sin xy + g(y, z)$, som deriverat m.a.p. y och insatt i ekvation 2 ger $g'_y(y, z) = ze^{yz}$, d.v.s. $g(y, z) = e^{yz} + h(z)$. Derivering av u m.a.p. z och insättning i ekvation 3 ger nu $h'(z) = 1$, d.v.s. $h(z) = z + C$. Villkoret $u(0, 0, 0) = 0$ ger slutligen $C = -1$. Svar: $u(x, y, z) = x + \sin xy + e^{yz} + z - 1$.
- (b) Integration av ekvation 2 m.a.p. y ger $u = y^2 e^{x^2}/2x + g(x)$, som deriverat m.a.p. x och insatt i ekvation 1 ger $g'(x) = e^{x^2}(1 + y^2/2x^2)$, vilket är en motsägelse eftersom högerledet i denna likhet även beror på y . Svar: Lösning saknas.
6. Integralen är generaliserad men integranden är positiv (eftersom $y \geq |x| \geq 0$ i D), så variabelbyte och upprepad integration får användas.

Linjärt byte $u = x$, $v = \sqrt{3}y$, $w = 2z$ med $|d(u, v, w)/d(x, y, z)| = 2\sqrt{3}$ och nytt område $E : v \geq \sqrt{3}|u|$, $w \geq 0$, följt av rymdpolärt byte $u = r \sin \theta \cos \varphi$, $v = r \sin \theta \sin \varphi$, $w = r \cos \theta$, med gränser $F : 0 \leq r < \infty$, $0 \leq \theta \leq \pi/2$, $\pi/3 \leq \varphi \leq 2\pi/3$, ger

$$\begin{aligned} \iiint_D y e^{-(x^2+3y^2+4z^2)^2} dx dy dz &= \iiint_E \frac{v}{\sqrt{3}} e^{-(u^2+v^2+w^2)^2} \frac{du dv dw}{2\sqrt{3}} \\ &= \frac{1}{6} \int_0^\infty r^3 e^{-r^4} dr \cdot \int_0^{\pi/2} \sin^2 \theta d\theta \cdot \int_{\pi/3}^{2\pi/3} \sin \varphi d\varphi \\ &= \frac{1}{6} \left[\frac{e^{-r^4}}{-4} \right]_0^\infty \left[\frac{\theta}{2} - \frac{\sin 2\theta}{4} \right]_0^{\pi/2} [-\cos \varphi]_{\pi/3}^{2\pi/3} = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{\pi}{4} \cdot 1 = \frac{\pi}{96}. \end{aligned}$$