

Tentamen i Flervariabelanalys TATA69

2012-05-29 kl 14–19

Inga hjälpmedel tillåtna (inte heller miniräknare).

8/11/14 poäng med minst 3/4/5 uppgifter med minst 2 poäng (av 3 möjliga) ger betyg 3/4/5.

Länk till lösningsskiss finns efter tentamen på kursens hemsida.

Resultatet blir klart inom 10 arbetsdagar. Information om visning ges då på kursens hemsida.

1. Normallinjen genom $(1, 2)$ till kurvan $2x^2 - y^2 + 2 = 0$ skär kurvan i ytterligare en punkt. Vilken?

2. Beräkna

$$\iint_D \frac{x-y}{x+y} dx dy,$$

där D ges av $1 \leq x+y \leq 2x-y \leq 2$.

3. Bestäm samtliga lokala maximi- och minimipunkter till

$$f(x, y, z) = 2x^2 + y^2 + z^2 - x^2y.$$

4. Bestäm alla C^2 -lösningar $z(x, y)$ till differentialekvationen

$$xz''_{xx} - yz''_{xy} + z'_x = 2xy$$

för $x > 0$, $y > 0$ genom att till exempel göra variabelbytet $u = xy$, $v = y$.

5. Det homogena stympade klotet K ges av $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$ och $z \geq \frac{1}{3}$. Beräkna tyngdpunktens z -koordinat

$$z_T = \frac{\iiint_K z dx dy dz}{\iiint_K 1 dx dy dz}.$$

6. Visa att ekvationssystemet

$$\begin{cases} x + e^y + \ln z = e \\ e^x + \ln y + z = 2 \end{cases}$$

i en omgivning av punkten $(x, y, z) = (0, 1, 1)$ definierar C^1 -funktioner $y(x)$, $z(x)$. Avgör dessutom för var och en av dessa funktioner huruvida de har lokalt extremvärde i $x = 0$.

Lösningsskisser till tentamen i TATA69 Flervariabelanalys 2012-05-29

1. Kurvan kan skrivas som nivåkurvan $F(x, y) = 2x^2 - y^2 + 2 = 0$. Normallinjen till kurvan i punkten $(1, 2)$ har riktningsvektor $\mathbf{v} \parallel \nabla F(1, 2) = (4, -4)$, så vi kan ta $\mathbf{v} = (1, -1)$. Normallinjen ges därför av

$$(x, y) = (1, 2) + t(1, -1) = (1 + t, 2 - t), \quad t \in \mathbf{R},$$

och den skär kurvan precis där $0 = F(1 + t, 2 - t) = t^2 + 8t \Leftrightarrow t = 0$ eller $t = -8$, som ger punkterna $(1, 2)$ – som ju är startpunkten – respektive $(-7, 10)$. Svar: $(-7, 10)$.

2. Linjärt byte $u = x + y$, $v = 2x - y$ ger $d(u, v)/d(x, y) = -3$, så $dx dy = du dv/3$, och det nya området ges av $1 \leq u \leq v \leq 2$. Eftersom $x - y = (2v - u)/3$ får vi därför

$$\iint_D \frac{x - y}{x + y} dx dy = \frac{1}{9} \int_1^2 \left(\int_u^2 \frac{2v - u}{u} dv \right) du = \frac{1}{9} \int_1^2 \left(\frac{4}{u} - 2 \right) du = \frac{2}{9} (2 \ln 2 - 1).$$

3. Stationära punkter för f fås ur ekvationssystemet $f'_x = 4x - 2xy = 0$, $f'_y = 2y - x^2 = 0$, $f'_z = 2z = 0$. Den tredje ekvationen ger genast $z = 0$, och insättning av $2y = x^2$ från den andra i den första ger $4x - x^3 = 0$, alltså $x = 0$ eller $x = \pm 2$. Vi får således totalt tre stationära punkter: $(0, 0, 0)$, $(2, 2, 0)$ och $(-2, 2, 0)$.

Andraderivatorna blir $f''_{xx} = 4 - 2y$, $f''_{xy} = -2x$, $f''_{xz} = 0$, $f''_{yy} = 2$, $f''_{yz} = 0$, $f''_{zz} = 2$.

I punkten $(0, 0, 0)$ är $f''_{xx} = 4$ och $f''_{xy} = 0$, så vi får den kvadratiske formen

$$Q(h, k, l) = (h \quad k \quad l) \begin{pmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} & f''_{xz} \\ f''_{xy} & f''_{yy} & f''_{yz} \\ f''_{xz} & f''_{yz} & f''_{zz} \end{pmatrix} = (h \quad k \quad l) \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h \\ k \\ l \end{pmatrix} = 4h^2 + 2k^2 + 2l^2,$$

som är positivt definit: $Q(h, k, l) \geq 0$ för alla (h, k, l) , och $Q(h, k, l) = 0$ endast om $(h, k, l) = (0, 0, 0)$. Alltså är punkten $(x, y, z) = (0, 0, 0)$ en lokal minimipunkt för f .

I punkten $(2, 2, 0)$ blir i stället $f''_{xx} = 0$ och $f''_{xy} = -4$, och där blir $Q(h, k, l) = 2k^2 + 2l^2 - 8hk = 2((k - 2h)^2 - 4h^2 + l^2)$, som är indefinit: exempelvis är $Q(0, 1, 0) = 2 > 0$ medan $Q(1, 2, 0) = -8 < 0$. Punkten $(x, y, z) = (2, 2, 0)$ är alltså ingen lokal extrempunkt för f .

I punkten $(-2, 2, 0)$, slutligen, är $f''_{xx} = 0$ och $f''_{xy} = 4$, och där blir den kvadratiske formen $Q(h, k, l) = 2k^2 + 2l^2 + 8hk = 2((k + 2h)^2 - 4h^2 + l^2)$, som också är indefinit.

Svar: $(0, 0, 0)$ är en lokal minimipunkt. Lokala maximipunkter saknas.

4. Kedjeregeln ger $z'_x = z'_u u'_x + z'_v v'_x = y z'_u$ och $z'_y = z'_u u'_y + z'_v v'_y = x z'_u + z'_v$. Vidare, $z''_{xx} = (z'_x)'_x = (y z'_u)'_x = y(z'_u)'_x = y^2 z''_{uu}$ och $z''_{xy} = (z'_x)'_y = (y z'_u)'_y = z'_u + y(z'_u)'_y = z'_u + y(x z''_{uu} + z''_{uv})$. Insättning i differentialekvationen ger $-y^2 z''_{uv} = 2xy$, och eftersom $x > 0$ och $y > 0$ får vi $z''_{uv} = -2x/y = -2u/v^2$. Integration ger först $z'_u = 2u/v + g(u)$ och sedan $z = u^2/v + G(u) + H(v) = x^2 y + G(xy) + H(y)$, där G och H är \mathcal{C}^2 -funktioner av en variabel. Svar: $z(x, y) = x^2 y + G(xy) + H(y)$.

5. Skivorna K_z på fixa z -nivåer är cirkelskivor med radie $\sqrt{1-z^2}$, så

$$\iiint_K dx dy dz = \int_{1/3}^1 \left(\iint_{K_z} dx dy \right) dz = \int_{1/3}^1 \text{area}(K_z) dz = \int_{1/3}^1 \pi(1-z^2) dz = \frac{28}{81}\pi,$$

och, analogt,

$$\iiint_K z dx dy dz = \int_{1/3}^1 \pi(z-z^3) dz = \frac{16}{81}\pi,$$

så $z_T = (16\pi/81)/(28\pi/81) = 4/7$.

Svar: $z_T = 4/7$.

6. Sätt $F(x, y, z) = x + e^y + \ln z$ och $G(x, y, z) = e^x + \ln y + z$; då utgörs lösningarna till ekvationssystemet av skärningskurvan mellan nivåytorna $F = e$ och $G = 2$. Vi får

$$\nabla F \times \nabla G = \left(1, e^y, \frac{1}{z} \right) \times \left(e^x, \frac{1}{y}, 1 \right) = \left(e^y - \frac{1}{yz}, \frac{e^x}{z} - 1, \frac{1}{y} - e^x e^y \right),$$

vars x -komponent i punkten $(0, 1, 1)$ är $e - 1 \neq 0$. Eftersom $F(0, 1, 1) = e$, $G(0, 1, 1) = 2$ och F och G är \mathcal{C}^1 -funktioner, ger implicita funktionssatsen därför att ekvationssystemet $F = e$, $G = 2$ i någon omgivning till $(0, 1, 1)$ definierar \mathcal{C}^1 -funktioner $y(x)$ och $z(x)$. Implicit derivering med avseende på x nära $x = 0$ ger sedan, i matrisform,

$$\begin{pmatrix} e^y & 1/z \\ 1/y & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y'(x) \\ z'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -e^x \end{pmatrix} \implies \begin{pmatrix} y'(x) \\ z'(x) \end{pmatrix} = \frac{1}{e^y - 1/yz} \begin{pmatrix} 1 & -1/z \\ -1/y & e^y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ -e^x \end{pmatrix}.$$

Eftersom $y(0) = 1$ och $z(0) = 1$ får vi speciellt att $y'(0) = 0$ och $z'(0) = -1$, så $z(x)$ har inte lokalt extremvärde i $x = 0$ medan $y(x)$ eventuellt har det. Från uttrycket ovan ser vi att funktionerna $y(x)$ och $z(x)$ till och med är \mathcal{C}^2 eftersom högerledet där är \mathcal{C}^1 , och vi kan därför derivera en gång till:

$$y''(x) = \frac{d}{dx} \left(\frac{e^x/z - 1}{e^y - 1/yz} \right) = \frac{e^x/z - e^x z'/z^2}{e^y - 1/yz} - \frac{(e^x/z - 1) \cdot \text{något}}{(e^y - 1/yz)^2} = \frac{2}{e - 1} > 0 \text{ då } x = 0,$$

så $y(x)$ har lokalt minimum i $x = 0$.