Linköpings universitet
Matematiska institutionen
F-laget

Kurskod: TATA69
Provkod: TEN1

Tentamen i Flervariabelanalys TATA69

2011-10-17 kl 14-19

Inga hjälpmedel tillåtna (inte heller miniräknare).
8/11/14 poäng med minst 3/4/5 uppgifter med minst 2 poäng (av 3 möjliga) ger betyg 3/4/5.
Länk till lösningsskiss finns efter tentamen på kursens hemsida.
Resultatet blir klart inom 10 arbetsdagar. Information om visning ges då på kursens hemsida.

1. Bestäm samtliga lokala maximi- och minimipunkter till

$$f(x,y,z) = x^2 + 5y^2 + 8z^2 - 4xy + 2xz + 2yz - 10x + 10y - 32z.$$

2. Beräkna

$$\iint_D \frac{dxdy}{x},$$

där D ges av $2x + y \geq 2$, $\ln x \leq y \leq 1$.

3. Bestäm samtliga punkter på kurvan

$$x^2 + 4y^2 = 4$$

där normallinjen går genom punkten $(-1, 0)$.

4. Låt D vara kroppen som beskrivs av olikheterna

$$z \geq 0, \quad x^2 + y^2 \leq z^2, \quad x^2 + y^2 + z \leq 2,$$

där x, y, z [enhet m] är rumskoordinater, och som har en variabel densitet som beskrivs av funktionen $\rho(x,y,z) = 1/(1 + x^2 + y^2)$ [enhet kg/m^3]. Beräkna den totala massan av D.

5. Låt (r, φ) vara polära koordinater i xy-planet. Beräkna andraderivatan $\dfrac{\partial^2 f}{\partial r \partial \varphi}$ i punkten $(x,y) = (0,2)$, om funktionen f där har derivator $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 7$ och $\dfrac{\partial f}{\partial x} = 5$.

6. Avgör om

$$f(x,y) = 4(\cos x + \cos y) + \frac{1}{1 - (x+y)^2}$$

har ett lokalt maximum eller minimum i origo.

Lösningsskisser till tentamen i Flervariabelanalys TATA69, 2011-10-17

1. Vi löser ekvationssystemet $f'_x = 2x-4y+2z-10 = 0$, $f'_y = 10y-4x+2z+10 = 0$, $f'_z = 16z+2x+2y-32 = 0$ som i linjär algebra. Lösningen blir $(x,y,z) = (1,-1,2)$. Beräkning av andraderivatorna ger den kvadratiska formen Q där
$$Q/2 = h^2 + 5k^2 + 8l^2 - 4hk + 2hl + 2kl = (h-2k+l)^2 + (k+3l)^2 - 2l^2.$$
Teckenkaraktären $++-$ visar att Q är indefinit, så f har en sadelpunkt i $(1,-1,2)$, och därmed inga lokala extempunkter.

2. Vi väljer att integrera med avseende på x först, då y-integration först skulle kräva uppdelning av integralen. Tvärsnitten blir $1 - y/2 \le x \le e^y$ och projektionen på y-axeln $0 \le y \le 1$. Detta ger
$$\iint_D \frac{dxdy}{x} = \int_0^1 \left(\int_{1-y/2}^{e^y} \frac{dx}{x} \right) dy = \int_0^1 \big(y - \ln(1-y/2)\big) dy = \frac{1}{2} - \int_{1/2}^1 \ln(t) 2dt$$
$$= \frac{1}{2} - 2[t\ln t - t]_{1/2}^1 = \frac{3}{2} - \ln 2.$$

3. Beteckna den sökta punkten med (a,b). Vi har $a^2 + 4b^2 = 4$, då (a,b) ligger på ellipsen $f = 4$, där $f(x,y) := x^2 + 4y^2$. En normalvektor till ellipsen i denna punkt är $\nabla f(a,b) = (2a, 8b)$. Att normallinjen i (a,b) går genom $(-1,0)$ innebär att det finns $t \in \mathbf{R}$ så att
$$(a,b) + t(2a,8b) = (-1,0),$$
det vill säga $(-1-a, -b)$ är parallell med $(2a, 8b)$. Ekvivalent är kravet att
$$\det \begin{bmatrix} -1-a & 2a \\ -b & 8b \end{bmatrix} = -8b - 6ab = -2b(4+3a) = 0.$$
Fall 1: $b = 0$, som ger $a^2 = 4$ och punkterna $(2,0)$ och $(-2,0)$. Fall 2: $a = -4/3$, som ger $b^2 = 1 - (-4/3)^2/4 = 5/9$ och punkterna $(-4/3, \sqrt{5}/3)$ och $(-4/3, -\sqrt{5}/3)$.

4. Uttrycket för massan är $\iiint_D \rho(x,y,z)dxdydz$. Vi beräknar denna med upprepad integration och endimensionella tvärsnitt $\sqrt{x^2+y^2} \le z \le 2 - x^2 - y^2$ i z-led. Projektionen E på xy-planet bestäms av $r \le 2 - r^2$, det vill säga $r \le 1$, där $r = \sqrt{x^2+y^2}$. E är alltså enhetsskivan, och massan [kg] blir
$$\iint_E \left(\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{2-x^2-y^2} \frac{dz}{1+x^2+y^2} \right) dxdy = \iint_E \frac{2 - x^2 - y^2 - \sqrt{x^2+y^2}}{1+x^2+y^2} dxdy$$
$$= 2\pi \int_0^1 \frac{2 - r^2 - r}{1+r^2} r\,dr = 2\pi \int_0^1 \left(\frac{1+3r}{1+r^2} - 1 - r \right) dr = \pi\Big(\frac{\pi}{2} + 3\ln 2 - 3\Big).$$

5. För polärt variabelbyte $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, ger kedjeregeln $f'_r = \cos\varphi f'_x + \sin\varphi f'_y$, $f'_\varphi = -r\sin\varphi f'_x + r\cos\varphi f'_y$. Detta ger i $(r,\varphi) = (2, \pi/2)$
$$f''_{r\varphi} = (\cos\varphi f'_x + \sin\varphi f'_y)'_\varphi = -\sin\varphi f'_x + \cos\varphi(-r\sin\varphi f''_{xx} + r\cos\varphi f''_{xy})$$
$$+ \cos\varphi f'_y + \sin\varphi(-r\sin\varphi f''_{yx} + r\cos\varphi f''_{yy})$$
$$= -\sin\varphi f'_x + \cos\varphi f'_y + \tfrac{1}{2} r\sin(2\varphi)(f''_{yy} - f''_{xx}) + r\cos(2\varphi) f''_{xy} = -5+0+0-14 = -19.$$

6. Vi beräknar först att f har en stationär punkt med kvadratisk form $Q = -2(x-y)^2$ i origo. Denna är negativt semi-definit, och ingen slutsats om lokalt extremvärde kan dras av detta. Den kvadratiska formens utseende leder oss till att studera f längs linjen $x = y$. Med envariabel-Maclaurinutveckling har vi

$$f(x,x) = 8\cos x + \frac{1}{1-4x^2} = 9 + (16 + 1/3)x^4 + \mathcal{O}(x^6) > 9$$

för alla små $x \neq 0$. Å andra sidan har vi längs linjen $y = -x$ att

$$f(x,-x) = 8\cos x + 1 < 9$$

för alla små $x \neq 0$. Alltså har f inget lokalt extremvärde i origo.