

Tentamen i Flervariabelanalys TATA69

2011-08-18 kl 14-19

Inga hjälpmedel tillåtna (inte heller miniräknare).

8/11/14 poäng med minst 3/4/5 uppgifter med minst 2 poäng (av 3 möjliga) ger betyg 3/4/5.

Länk till lösningsskiss finns efter tentamen på kursens hemsida.

Resultatet blir klart inom 10 arbetsdagar. Information om visning ges då på kursens hemsida.

1. Beräkna

$$\iint_D e^{-y/x} dx dy,$$

där D begränsas av x -axeln, linjen $x = 1$ och kurvan $x = \sqrt{y}$.

2. Beräkna

$$\iiint_D xz dx dy dz,$$

där D ges av $x^2 + y^2 + z^2 \leq 3$, $z \geq 0$ and $y \leq x$.

3. En brunbjörn vaknar i ett ide i Orsa. Lufttemperaturen T [$^{\circ}\text{C}$] beror på x och y [m] enligt

$$T(x, y) = 10 - \frac{5}{3 + x^2 + 2y^2}.$$

Björnen befinner sig i $(x, y) = (3, 2)$ och lufsar med hastigheten 2 m/s. I vilken riktning bör den lufsa för snabbast möjliga uppvärmning? Beräkna dessutom, dels i $^{\circ}\text{C}/\text{m}$ och dels i $^{\circ}\text{C}/\text{s}$, hur snabbt temperaturen då stiger.

4. Bestäm samtliga lokala maximi- och minimipunkter till

$$f(x, y) = 3 \ln(1 + x^2 + y^2) + 2xy.$$

5. Visa att avbildningen $\begin{cases} u = 3x + \sin 4y \\ v = 3x - 5y \end{cases}$ har en global \mathcal{C}^1 -invers $\begin{cases} x = x(u, v) \\ y = y(u, v) \end{cases}$.
Beräkna sedan x'_v i punkten $(u, v) = (3, 3)$.

6. Antag att $f \in \mathcal{C}^2(\mathbf{R}^2)$. Antag vidare att

$$f(0, 0) = 0, f'_x(0, 0) = 3, f'_y(0, 0) = -2,$$

$$f''_{xx}(0, 0) = -1, f''_{xy}(0, 0) = 5 \text{ och } f''_{yy}(0, 0) = 4.$$

Sätt $g(t) = f(t, 2t)$ och $h(t) = f(g(t), \sin(3g(t)))$. Beräkna $g'(0)$, $h'(0)$ och $h''(0)$.

Lösningsskisser till tentamen i Flervariabelanalys TATA69, 2011-08-18

1. Vi integrerar lämpligtvis med avseende på y innerst. Projektionen av D på x -axeln är $0 \leq x \leq 1$ och tvärsnittet ovanför $x \in [0, 1]$ är $0 \leq y \leq x^2$. Integralen blir

$$\int_0^1 \left(\int_0^{x^2} e^{-y/x} dy \right) dx = \int_0^1 [-xe^{-y/x}]_{y=0}^{x^2} dx = \int_0^1 (x - xe^{-x}) dx = \dots = \frac{2}{e} - \frac{1}{2}.$$

2. De tre olikheterna som definierar D blir i rymdpolära koordinater $0 \leq r \leq \sqrt{3}$, $0 \leq \theta \leq \pi/2$ respektive $-3\pi/4 \leq \varphi \leq \pi/4$. Rymdpolärt variabelbyte i integralen ger

$$\begin{aligned} \int_{-3\pi/4}^{\pi/4} \left(\int_0^{\pi/2} \left(\int_0^{\sqrt{3}} (r \sin \theta \cos \varphi)(r \cos \theta) r^2 \sin \theta dr \right) d\theta \right) d\varphi \\ = \left[\frac{1}{5} r^5 \right]_0^{\sqrt{3}} \left[\frac{1}{3} \sin^3 \theta \right]_0^{\pi/2} \left[\sin \varphi \right]_{-3\pi/4}^{\pi/4} = \dots = 3\sqrt{6}/5. \end{aligned}$$

3. Vi beräknar i punkten $(3, 2)$ gradienten

$$\nabla T = \begin{bmatrix} 10x/(3 + x^2 + 2y^2)^2 \\ 20y/(3 + x^2 + 2y^2)^2 \end{bmatrix} = \frac{1}{40} \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix},$$

mätt i $^{\circ}\text{C}/\text{m}$. Björnen bör alltså lufsa i riktningen som pekas ut av vektorn $(3, 4)$. Temperaturökningen, mätt i $^{\circ}\text{C}/\text{m}$, blir då $|\nabla T| = \sqrt{(3/40)^2 + (1/10)^2} = 1/8$. Mätt i $^{\circ}\text{C}/\text{s}$ blir den $(1/8^{\circ}\text{C}/\text{m})(2\text{m}/\text{s}) = 1/4^{\circ}\text{C}/\text{s}$.

4. Ekvationerna för de stationära punkterna blir $f'_x = 6x/(1 + x^2 + y^2) + 2y = 0$ och $f'_y = 6y/(1 + x^2 + y^2) + 2x = 0$. Vi delar upp i fall. (1) $x = 0$, ger från första ekvationen $y = 0$. (2) $y = 0$, ger från andra ekvationen $x = 0$. (3) $x \neq 0$ och $y \neq 0$. Dela första ekvationen med $2x$ och andra med $2y$. Detta ger $y/x = -3/(1 + x^2 + y^2) = x/y$. Alltså $(x/y)^2 = 1$, så $x = y$ eller $x = -y$. Om $x = y$ så är $3/(1 + 2x^2) = -1$, vilket saknar lösning. Om $x = -y$ så är $3/(1 + 2x^2) = 1$, vilket ger lösningar $(1, -1)$ och $(-1, 1)$. Sålunda finns tre stationära punkter $(0, 0)$, $(1, -1)$ och $(-1, 1)$.

Andraderivatorna är $f''_{xx} = 6(1 - x^2 + y^2)/(1 + x^2 + y^2)^2$, $f''_{xy} = -12xy/(1 + x^2 + y^2)^2 + 2$ och $f''_{yy} = 6(1 + x^2 - y^2)/(1 + x^2 + y^2)^2$. Kvadratisk form i $(0, 0)$:

$$Q = 6h^2 + 2 \cdot 2hk + 6k^2 = 6(h + k/3)^2 + (16/3)k^2.$$

Då denna är positivt definit är $(0, 0)$ ett lokalt minimum. Kvadratisk form i $(1, -1)$:

$$Q = (6/9)h^2 + 2 \cdot (10/3)hk + (6/9)k^2 = (2/3)(h + 5k)^2 - (48/3)k^2.$$

Då denna är indefinit är $(1, -1)$ en sadelpunkt. Den kvadratiske formen i $(-1, 1)$ ses vara densamma som i $(1, -1)$ och därför är även $(-1, 1)$ en sadelpunkt. Alltså har f endast en lokal extrempunkt: ett lokalt minimum i origo.

5. Vi visar först att avbildningen har en global invers. Subtraktion av ekvationerna ger $u - v = \sin(4y) + 5y$. Funktionen $f(y) = \sin(4y) + 5y$ har $f'(y) = 4 \cos(4y) + 5 \geq 1$. Alltså är f strängt växande med $\lim_{y \rightarrow \pm\infty} f(y) = \pm\infty$, så f är en inverterbar envariabelfunktion. Givet godtyckligt (u, v) beräknar vi entydigt $y = f^{-1}(u-v)$ och sedan $x = (v + 5y)/3$. Detta visar avbildningens globala inverterbarhet. Speciellt ser vi genom prövning att $(u, v) = (3, 3)$ motsvarar $(x, y) = (1, 0)$.

Beräkna nu funktionalmatrisen

$$\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} = \begin{bmatrix} u'_x & u'_y \\ v'_x & v'_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 4 \cos(4y) \\ 3 & -5 \end{bmatrix}.$$

Funktionaldeterminanten är $-15 - 12 \cos(4y) \leq -3 < 0$ för alla (x, y) . Inversa funktionssatsen visar nu att avbildningens invers är \mathcal{C}^1 kring alla (u, v) . Vidare följer att inversens funktionalmatris i $(u, v) = (3, 3)$, motsvarande $(x, y) = (1, 0)$, är

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{bmatrix} x'_u & x'_v \\ y'_u & y'_v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 3 & -5 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{-27} \begin{bmatrix} -5 & -4 \\ -3 & 3 \end{bmatrix},$$

från vilken vi avläser $x'_v = (-4)/(-27) = 4/27$.

6. Kedjeregeln ger

$$g'(t) = f'_x(t, 2t) + 2f'_y(t, 2t)$$

och

$$h'(t) = f'_x(g(t), \sin(3g(t)))g'(t) + f'_y(g(t), \sin(3g(t)))3g'(t) \cos(3g(t)).$$

Insatta värden ger $g'(0) = 3 + 2(-2) = -1$ och $h'(0) = 3(-1) + (-2)3(-1)1 = 3$. Ytterligare kedje- och produktregler ger

$$\begin{aligned} h''(t) &= \left(f''_{xx}(g, \sin 3g)g' + f''_{xy}(g, \sin 3g)3g' \cos(3g) \right) g' + f'_x(g, \sin 3g)g'' \\ &\quad + \left(f''_{yx}(g, \sin 3g)g' + f''_{yy}(g, \sin 3g)3g' \cos(3g) \right) 3g' \cos(3g) \\ &\quad + f'_y(g, \sin 3g)3 \left(g'' \cos(3g) - 3(g')^2 \sin(3g) \right). \end{aligned}$$

Vi beräknar

$$g''(t) = f''_{xx}(t, 2t) + 4f''_{xy}(t, 2t) + 4f''_{yy}(t, 2t) = -1 + 4 \cdot 5 + 4 \cdot 4 = 35$$

och

$$\begin{aligned} h''(0) &= \left(-1(-1) + 5 \cdot 3(-1)1 \right) (-1) + 3 \cdot 35 + \left(5(-1) + 4 \cdot 3(-1)1 \right) 3(-1)1 + (-2)3(35 \cdot 1 - 0) \\ &= 14 + 105 + 51 - 210 = -40. \end{aligned}$$