

Tentamen i Flervariabelanalys TATA69

2011-05-31 kl 14-19

Inga hjälpmedel tillåtna (inte heller miniräknare).

8/11/14 poäng med minst 3/4/5 uppgifter med minst 2 poäng (av 3 möjliga) ger betyg 3/4/5.

Länk till lösningsskiss finns efter tentamen på kursens hemsida.

Resultatet blir klart inom 10 arbetsdagar. Information om visning ges då på kursens hemsida.

1. Bestäm alla C^1 -lösningar $z(x, y)$ till differentialekvationen $xyz'_x - z'_y = x^2e^{y^2}$ för $x > 0$ under randvillkoret $z(x, 0) = e^{x^2}$ genom att till exempel göra variabelbytet $u = x^2e^{y^2}$, $v = y$.
2. Bestäm alla plan som tangerar ytan $x^4 + y^2 - z^2 = 1$ och är parallella med planet $2x + y + z = 1$.

3. Beräkna

$$\iint_D ((x-1)^2 + 2y^2) dx dy,$$

där D ges av $x^2 + 2x + 2y^2 \leq 3$.

4. Bestäm samtliga lokala maximi- och minimipunkter till

$$f(x, y, z) = x^2 + 2y^2 - 2xy + 2yz + \frac{2}{3}z^3.$$

5. Beräkna

$$\iiint_D (x - y) dx dy dz,$$

där D ges av $0 \leq x + y \leq y + z \leq x - 3z \leq 1$.

6. (a) Definiera vad som menas med att en funktion $f : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$ är differentierbar i (a, b) .
(b) Visa att om $f : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$ är differentierbar i (a, b) så är f partiellt deriverbar där.
(c) Avgör om funktionen

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{2x^3 + 2y^3 + x^4}{x^2 + 2y^2} & \text{då } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{då } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

är differentierbar i origo.

Lösningsskisser till tentamen i TATA69 Flervariabelanalys 2011-05-31

- Kedjeregeln ger $z'_x = z'_u u'_x + z'_v v'_x = 2x e^{y^2} z'_u$ och $z'_y = z'_u u'_y + z'_v v'_y = 2x^2 y e^{y^2} z'_u + z'_v$, och insättning i differentialekvationen ger $-z'_v = u$, d.v.s. $z'_v = -u$, som integrerad ger $z = -uv + g(u) = -x^2 y e^{y^2} + g(x^2 e^{y^2})$, där g är en C^1 -funktion av en variabel. Bivillkoret ger nu $e^{x^2} = z(x, 0) = g(x^2)$ då $x > 0$, så $g(t) = e^t$ för $t > 0$, och därmed får vi till sist $z(x, y) = -x^2 y e^{y^2} + \exp(x^2 e^{y^2})$ då $x > 0$. Svar: $z(x, y) = -x^2 y e^{y^2} + \exp(x^2 e^{y^2})$.
- Sätt $F(x, y, z) = x^4 + y^2 - z^2$; då är den givna ytan nivåytan $F(x, y, z) = 1$. Tangentplanet till denna yta i en punkt (a, b, c) på ytan är parallellt med planet $2x + y + z = 1$ precis då $\nabla F(a, b, c) \parallel (2, 1, 1)$ och $F(a, b, c) = 1$, d.v.s. precis då $(4a^3, 2b, -2c) \parallel (2, 1, 1)$ och $a^4 + b^2 - c^2 = 1$. Det första villkoret ger $a^3 = b = -c$, som sedan insatt i det andra ger $a^4 = 1$, d.v.s. $a = \pm 1$, och därmed tangeringspunkterna $(1, 1, -1)$ och $(-1, -1, 1)$, med de respektive tangentplanen $2x + y + z = \pm 2$.

Svar: Planen är $2x + y + z = 2$ och $2x + y + z = -2$.

- D kan skrivas $(x + 1)^2 + 2y^2 \leq 4$. Linjärt byte $u = x + 1$, $v = \sqrt{2}y$ med ny mängd $E : u^2 + v^2 \leq 4$, $d(u, v)/d(x, y) = \sqrt{2}$ och därmed $dx dy = dudv/\sqrt{2}$, följt av planpolärt byte $u = \rho \cos \varphi$, $v = \rho \sin \varphi$ med ny mängd $F : 0 \leq \rho \leq 2$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ och $dudv = \rho d\rho d\varphi$, ger

$$\begin{aligned} \iint_D ((x-1)^2 + 2y^2) dx dy &= \iint_E ((u-2)^2 + v^2) \frac{dudv}{\sqrt{2}} = \iint_F (\rho^2 - 4\rho \cos \varphi + 4) \frac{\rho d\rho d\varphi}{\sqrt{2}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^{2\pi} \left(\int_0^2 (\rho^2 - 4\rho \cos \varphi + 4) d\rho \right) \rho d\rho = \frac{2\pi}{\sqrt{2}} \left[\frac{(\rho^2 + 4)^2}{4} \right]_0^2 = 12\sqrt{2} \pi. \end{aligned}$$

- Stationära punkter fås ur ekvationssystemet $f'_x = 2x - 2y = 0$, $f'_y = 4y - 2x + 2z = 0$, $f'_z = 2y + 2z^2 = 0$. De två första ger $x = y = -z$, som insatt i den tredje ger $2z^2 - 2z = 0$, d.v.s. $z = 0$ eller $z = 1$, och därmed är de stationära punkterna $(0, 0, 0)$ och $(-1, -1, 1)$.

Andraderivatorna blir $f''_{xx} = 2$, $f''_{xy} = -2$, $f''_{xz} = 0$, $f''_{yy} = 4$, $f''_{yz} = 2$ och $f''_{zz} = 4z$.

I punkten $(0, 0, 0)$ blir $f''_{zz} = 0$, och där blir den kvadratiske formen

$$\begin{aligned} Q(h, k, l) &= (h \quad k \quad l) \begin{pmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} & f''_{xz} \\ f''_{xy} & f''_{yy} & f''_{yz} \\ f''_{xz} & f''_{yz} & f''_{zz} \end{pmatrix} = (h \quad k \quad l) \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h \\ k \\ l \end{pmatrix} \\ &= 2h^2 + 4k^2 - 4hk + 4kl = 2((h-k)^2 + (k+l)^2 - l^2), \end{aligned}$$

som är indefinit eftersom t.ex. $Q(1, 0, 0) = 2 > 0$ och $Q(1, 1, -1) = -2 < 0$, och den stationära punkten $(0, 0, 0)$ är således ingen lokal extrempunkt.

I punkten $(-1, -1, 1)$ blir $f''_{zz} = 4$, och där blir den kvadratiske formen

$$Q(h, k, l) = 2h^2 + 4k^2 - 4hk + 4kl + 4l^2 = 2((h-k)^2 + (k+l)^2 + l^2),$$

så $Q(h, k, l) \geq 0$ för alla (h, k, l) , och $Q(h, k, l) = 0$ endast om $h - k = 0$, $k + l = 0$ och $l = 0$, d.v.s. endast om $(h, k, l) = (0, 0, 0)$. Q är därmed positivt definit, och den stationära punkten $(-1, -1, 1)$ är således en lokal minimipunkt.

Svar: $(-1, -1, 1)$ är en lokal minimipunkt. Lokala maximipunkter saknas.

5. Linjärt byte $u = x + y$, $v = y + z$, $w = x - 3z$ ger ny mängd $E : 0 \leq u \leq v \leq w \leq 1$, $d(u, v, w)/d(x, y, z) = -2$ och därmed $dx dy dz = dudv dw/2$. Med exempelvis skivor $E_w = \{(u, v) : 0 \leq u \leq v \leq w\}$ för $0 \leq w \leq 1$ får vi, eftersom $x - y = 2u - 3v - w$, att

$$I = \iiint_D (x - y) dx dy dz = \frac{1}{2} \int_0^1 \left(\iint_{E_w} (2u - 3v - w) dudv \right) dw = \frac{1}{2} \int_0^1 I(w) dw,$$

där

$$I(w) = \int_0^w \left(\int_0^v (2u - 3v - w) du \right) dv = \int_0^w (-2v^2 - vw) dv = -\frac{7w^3}{6},$$

varför slutligen

$$I = \frac{1}{2} \int_0^1 \left(-\frac{7w^3}{6} \right) dw = -\frac{7}{48}.$$

6. (a) Se kursboken, Definition 2 i kapitel 2.2 (fallet $n = 2$).
 (b) Se kursboken, Sats 2 i kapitel 2.2 (fallet $n = 2$).
 (c) Eftersom $(f(h, 0) - f(0, 0))/h = 2 + h \rightarrow 2$ då $h \rightarrow 0$ och $(f(0, k) - f(0, 0))/k = 1 \rightarrow 1$ då $k \rightarrow 0$ ser vi att $f'_x(0, 0) = 2$ och $f'_y(0, 0) = 1$. Om f är differentierbar i origo gäller alltså att $R(h, k) = (f(h, k) - f(0, 0) - 2h - k)/(h^2 + k^2)^{1/2} \rightarrow 0$ då $(h, k) \rightarrow (0, 0)$.
 Men

$$R(h, k) = \frac{f(h, k) - f(0, 0) - 2h - k}{\sqrt{h^2 + k^2}} = \frac{h^4 - 4hk^2 - h^2k}{(h^2 + 2k^2)\sqrt{h^2 + k^2}},$$

så t.ex. $R(h, h) = (h^2 - 5h)/(3\sqrt{2}|h|) \rightarrow \mp 5/(3\sqrt{2})$ då $h \rightarrow 0^\pm$, och därmed existerar inte ens $\lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} R(h, k)$. Svar: f är *inte* differentierbar i origo.