

Tentamen i Flervariabelanalys TATA69

2011-04-26 kl 14-19

Inga hjälpmedel tillåtna (inte heller miniräknare).

8/11/14 poäng med minst 3/4/5 uppgifter med minst 2 poäng (av 3 möjliga) ger betyg 3/4/5.

Länk till lösningsskiss finns efter tentamen på kursens hemsida.

Resultatet blir klart inom 10 arbetsdagar. Information om visning ges då på kursens hemsida.

1. Beräkna

$$\iint_D \frac{dx dy}{2x - y + 1},$$

där D ges av $1 \leq x + 2y \leq 2x - y \leq 2$.

2. Bestäm samtliga lokala maximi- och minimipunkter till

$$f(x, y, z) = xy + x^2z - x^2 - y - z^2.$$

3. Beräkna

$$\iiint_D xz \, dx dy dz,$$

där D ges av $x^2 + y^2 + 4z^2 \leq 2$, $x \geq 0$, $z \geq 0$.

4. Finn den funktion $z(x, y)$ som löser den partiella differentialekvationen

$$x^2 z'_x - y^2 z'_y = y^3/x, \quad \text{för } x > 0, y > 0,$$

och uppfyller villkoret $z(x, x) = 1/x$ för alla $x > 0$, genom att till exempel göra variabelbytet $u = 1/x + 1/y$, $v = y$.

5. Undersök gränsvärdet

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^3 + y^3}{(x^2 + y^2)^a}$$

för alla reella värden på a .

6. Visa att ekvationerna

$$\begin{cases} 3x + xz + y + e^y + z^2 + e^z = 2, \\ 5x + xy + yz + e^y + 2 \sin z = 1, \end{cases}$$

i en omgivning av $(0, 0, 0)$ definierar \mathcal{C}^1 -funktioner $x(z)$ och $y(z)$. Beräkna $x'(0)$ och $y'(0)$.

Lösningsskisser till tentamen i Flervariabelanalys TATA69, 2011-04-26

1. Ett lämpligt variabelbyte är $u = x + 2y$, $v = 2x - y$. Funktionaldeterminanten blir $d(u, v)/d(x, y) = -5$ och integralen blir $\iint_E \frac{1}{v+1} \frac{1}{5} dudv$ efter variabelbytet, där det nya området E ges av $1 \leq u \leq v \leq 2$. Triangeln E har tvärsnitt $1 \leq u \leq v$ parallella med u -axeln för $1 \leq v \leq 2$. Itererad integration ger nu

$$\begin{aligned} \frac{1}{5} \int_1^2 \left(\int_1^v \frac{1}{v+1} du \right) dv &= \frac{1}{5} \int_1^2 \frac{v-1}{v+1} dv \\ &= \frac{1}{5} \int_1^2 \left(1 - \frac{2}{v+1} \right) dv = \frac{1}{5} [v - 2 \ln(v+1)]_1^2 = \frac{1}{5} - \frac{2}{5} \ln(3/2). \end{aligned}$$

2. De tre partiella derivatorna är $f'_x = y + 2xz - 2x$, $f'_y = x - 1$ och $f'_z = x^2 - 2z$. Ekvationerna $f'_y = 0$, $f'_z = 0$ och $f'_x = 0$ ger i tur och ordning $x = 1$, $z = 1/2$ och $y = 1$. I denna stationära punkt $(1, 1, 1/2)$ har vi andraderivator $f''_{xx} = 2z - 2 = -1$, $f''_{yy} = 0$, $f''_{zz} = -2$, $f''_{xy} = 1$, $f''_{xz} = 2x = 2$ och $f''_{yz} = 0$. Kvadratkomplettering av den kvadratiske formen ger

$$Q = -h^2 - 2l^2 + 2hk + 4hl = -(h-k-2l)^2 + k^2 + 2l^2 + 4kl = -(h-k-2l)^2 + (k+2l)^2 - 2l^2.$$

Tecknen $-+-$ visar att Q är indefinit och den stationära punkten är således ingen maximi- eller minimipunkt. Inga sådana punkter finns alltså.

3. Vi gör först det linjära variabelbytet $u = x$, $v = y$, $w = 2z$. Funktionaldeterminanten blir $d(u, v, w)/d(x, y, z) = 2$ och integralen blir

$$\iiint_E u \frac{1}{2} \frac{1}{2} dudvdw$$

efter variabelbytet, där det nya området E ges av $u^2 + v^2 + w^2 \leq 2$, $u \geq 0$, $w \geq 0$. Sedan gör vi rymdpolärt variabelbyte $u = r \sin \theta \cos \phi$, $v = r \sin \theta \sin \phi$, $w = r \cos \theta$, där vi från ekvationerna för E utläser gränserna $0 \leq r \leq \sqrt{2}$, $0 \leq \theta \leq \pi/2$, $-\pi/2 \leq \phi \leq \pi/2$. Variabelbyte ger integralen

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} \iiint (r \sin \theta \cos \phi)(r \cos \theta)(r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi) \\ = \frac{1}{4} \int_0^{\sqrt{2}} r^4 dr \int_0^{\pi/2} \sin^2 \theta \cos \theta d\theta \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos \phi d\phi = \dots = \frac{2\sqrt{2}}{15}. \end{aligned}$$

4. Kedjeregeln ger $z'_x = -x^{-2}z'_u + 0$ och $z'_y = -y^{-2}z'_u + z'_v$. I nya koordinater blir ekvationen därför $-z'_u - (-z'_u + y^2 z'_v) = y^3/x$, det vill säga $z'_v = -y/x = 1 - uv$, eftersom $uv = y/x + 1$. Integration med avseende på v ger allmän lösning

$$z = v - \frac{1}{2}uv^2 + f(u) = y - \frac{1}{2}(1/x + 1/y)y^2 + f(1/x + 1/y),$$

där $f(t)$ är en godtycklig deriverbar funktion. Villkoret $z(x, x) = 1/x$ bestämmer f . Vi får $1/x = z(x, x) = x - x + f(2/x)$, och därmed $f(t) = t/2$. Den sökta funktionen blir

$$z(x, y) = y + \frac{1}{2}(1 - y^2)(1/x + 1/y).$$

5. Genom att undersöka gränsvärden längs kurvor in mot origo, tar vi först fram en kandidat till tvåvariabelgränsvärdet. Först gränsvärdet längs x -axeln. Då $y = 0$ får vi

$$\frac{x^3 + 0}{(x^2 + 0)^a} = x^{3-2a} \rightarrow \begin{cases} 0, & a < 3/2, \\ 1, & a = 3/2, \\ \infty, & a > 3/2, \end{cases} \quad x \rightarrow 0^+.$$

Tvåvariabelgränsvärdet existerar sålunda inte (ändligt) om $a > 3/2$. Betrakta sedan gränsvärdet längs linjen $y = x$ i fallet $a = 3/2$. Vi får här $(x^3 + x^3)/(x^2 + x^2)^{3/2} = 1/\sqrt{2} \rightarrow 1/\sqrt{2}$ då $x \rightarrow 0^+$. Då $1 \neq 1/\sqrt{2}$ existerar inte heller tvåvariabelgränsvärdet då $a = 3/2$. Antag nu $a < 3/2$, där enligt ovan den enda möjliga kandidaten till tvåvariabelgränsvärdet är 0. Med polära koordinater har vi uppskattningen

$$\left| \frac{r^3 \cos^3 \theta + r^3 \sin^3 \theta}{r^{2a}} - 0 \right| = r^{3-2a} |\cos^3 \theta + \sin^3 \theta| \leq 2r^{3-2a},$$

för alla θ . Då $\lim_{r \rightarrow 0^+} r^{3-2a} = 0$ när $a < 3/2$, drar vi av instängningsregeln slutsatsen att tvåvariabelgränsvärdet existerar och är lika med kandidaten 0. Alltså, gränsvärdet existerar om och endast om $a < 3/2$ och är då 0.

6. Beteckna med f, g vänsterleden i ekvationerna, så att dessa är $f = 2, g = 1$. Vi beräknar först gradienterna $\nabla f = (3 + z, 1 + e^y, x + 2z + e^z) = (3, 2, 1)$ och $\nabla g = (5 + y, x + z + e^y, y + 2 \cos z) = (5, 1, 2)$. Dessa är normalvektorer till ytorna $f = 2$ och $g = 1$. En tangentvektor till skärningskurvan är

$$\nabla f \times \nabla g = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -7 \end{pmatrix}.$$

Då denna vektors z -komponent är $-7 \neq 0$, följer av implicita funktionssatsen att $f = 2, g = 1$ definierar \mathcal{C}^1 -funktioner $x(z)$ och $y(z)$ kring $(0, 0, 0)$. Derivatorna uläses till $x'(0) = 3/(-7) = -3/7$ och $y'(0) = (-1)/(-7) = 1/7$.