Linköpings universitet
Matematiska institutionen
F-laget

Kurskod: TATA69
Provkod: TEN1

Tentamen i Flervariabelanalys TATA69

2010-12-22 kl 8–13

Inga hjälpmedel tillåtna (inte heller miniräknare).
8/11/14 poäng med minst 3/4/5 uppgifter med minst 2 poäng (av 3 möjliga) ger betyg 3/4/5.
Länk till lösningsskiss finns efter tentamen på kursens hemsida.
Resultatet blir klart inom 10 arbetsdagar. Information om visning ges då på kursens hemsida.

1. Bestäm alla lokala maximi- och minimipunkter till

$$f(x, y) = x^3 + 3xy^2 - 15x + y^3 - 15y.$$

2. Finn den funktion $z(x, y)$ som löser den partiella differentialekvationen

$$x^2 \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = 1 \qquad \text{för } x > 0,\ y \geq 1,$$

och uppfyller randvillkoret $z(x, 1) = \ln x$ för alla $x > 0$, genom att till exempel göra variabelbytet $u = 1/x + \ln y$, $v = 1/y$.

3. Beräkna trippelintegralen $\iiint_D (1 + xz)\, dxdydz$, där

$$D = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 < 4,\ x > 0,\ y < 0,\ z < 0\}.$$

4. Beräkna $\iint_D xe^{x-2y}\, dxdy$, där D är triangeln med hörn i $(0, 0)$, $(2, 1)$ och $(1, 3)$.

5. Finn de punkter på ytan

$$z^2 = x^2 + y^2 + 3xy + 2,$$

i vilka ytans tangentplan innehåller $(17, 0, 2)$ och är parallellt med x-axeln.

6. Låt $d(x, y)$ beteckna det kortaste avståndet från punkten (x, y) till kvadraten

$$\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : |x| \leq 1,\ |y| \leq 1\}.$$

Beräkna

$$\iint_{\mathbf{R}^2} e^{-d(x,y)}\, dxdy.$$

Lösningsskisser till tentamen i Flervariabelanalys TATA69, 2010-12-22

1. De stationära punkterna finnes som lösningar till $3x^2 + 3y^2 = 15$, $6xy + 3y^2 = 15$. Ekvationssystemet löses t ex genom subtraktion av ekvationerna, vilket ger $x(x - 2y) = 0$ efter faktorisering. Falluppdelning, $x = 0$ och $x = 2y$, leder till de fyra lösningarna $(0, \sqrt{5})$, $(0, -\sqrt{5})$, $(2, 1)$ och $(-2, -1)$.

   Andraderivatorna blir $f''_{xx} = 6x$, $f''_{xy} = 6y$ och $f''_{yy} = 6x + 6y$. De kvadratiska formerna i de fyra punkterna blir:

   $Q_{(0,\sqrt{5})}(h, k) = 0 + 2 \cdot 6\sqrt{5}hk + 6\sqrt{5}k^2 = 6\sqrt{5}(k + h)^2 - 6\sqrt{5}h^2,$

   $Q_{(0,-\sqrt{5})}(h, k) = 0 - 2 \cdot 6\sqrt{5}hk - 6\sqrt{5}k^2 = -6\sqrt{5}(k + h)^2 + 6\sqrt{5}h^2,$

   $Q_{(2,1)}(h, k) = 12h^2 + 2 \cdot 6hk + 18k^2 = 12(h + k/2)^2 + 15k^2,$

   $Q_{(-2,-1)}(h, k) = -12h^2 - 2 \cdot 6hk - 18k^2 = -12(h + k/2)^2 - 15k^2.$

   Formerna är indefinit, indefinit, positivt definit respektive negativt definit. Funktionen har alltså ett lokalt min i $(2, 1)$ och ett lokalt max i $(-2, -1)$.

2. Kedjeregeln ger $z'_x = -x^{-2}z'_u$ och $z'_y = y^{-1}z'_u - y^{-2}z'_v$. Detta insatt ger ekvationen $-y^{-1}z'_v = 1$, dvs $z'_v = -1/v$ i de nya variablerna. Den allmänna lösningen är $z = -\ln v + f(u)$, där f är en godtycklig envariabelfunktion. I de gamla variablerna är lösningen $z(x, y) = \ln y + f(1/x + \ln y)$. Randvilkoret ger $f(1/x) = \ln x$, dvs f är funktionen $f(t) = -\ln t$. Lösningen blir $z(x, y) = \ln y - \ln(1/x + \ln y)$.

3. Rymdpolära koordinater används självfallet då D är en åttondel av klotet med radie 2 och centrum i origo. I sådana koordinater, säger första ekvationen $0 < r < 2$, sista ekvationen $\pi/2 < \theta < \pi$, och andra och tredje tillsammans $-\pi/2 < \varphi < 0$, vilket definierar det nya området E. Då ett åttondels klot med radie 2 har volym $4\pi/3$, räcker det att beräkna integralen av termen xz. Variabelbytesformeln ger

$$\begin{aligned}\iiint_D xz\, dxdydz &= \iiint_E (r\sin\theta\cos\varphi)(r\cos\theta)r^2\sin\theta\, drd\theta d\varphi \\ &= \left(\int_0^2 r^4\, dr\right)\left(\int_{\pi/2}^{\pi} \sin^2\theta\cos\theta\, d\theta\right)\left(\int_{-\pi/2}^{0} \cos\varphi\, d\varphi\right) \\ &= \tfrac{32}{5}[\tfrac{1}{3}\sin^3\theta]_{\pi/2}^{\pi}[\sin\varphi]_{-\pi/2}^{0} = -\tfrac{32}{15}.\end{aligned}$$

   Den sökta integralen är således $4\pi/3 - 32/15$.

4. Vi använder kantvektorerna $(2, 1)$ och $(1, 3)$ fästade i hörnet $(0, 0)$, och finner det lämpligt att göra variabelbytet $(x, y) = (0, 0) + u(2, 1) + v(1, 3)$, dvs $x = 2u + v$, $y = u + 3v$. Hörnen $(0, 0)$, $(2, 1)$ och $(1, 3)$ i xy-planet ses motsvara punkterna $(0, 0)$, $(1, 0)$ och $(0, 1)$ i uv-planet. Det nya området E i uv-planet blir alltså triangeln med dessa hörn. Uttryckt med olikheter ges E av $u + v < 1$, $u > 0$,$v > 0$. Variabelbytesformeln ger integralen

$$\begin{aligned}\iint_E (2u + v)e^{(2u+v)-2(u+3v)}\left|\det\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 3\end{pmatrix}\right| dudv &= 5\int_0^1 \left(\int_0^{1-v} (2u + v)du\right)e^{-5v}dv \\ = \frac{5}{4}\int_0^1 [(2u + v)^2]_{u=0}^{1-v}e^{-5v}dv &= 5\int_0^1 (1 - v)e^{-5v}dv = (4 + e^{-5})/5.\end{aligned}$$

5. Sätt $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + 3xy - z^2$. I en punkt (a,b,c) på ytan är en normalvektor till tangentplanet
$$\nabla f(a,b,c) = (2a+3b, 2b+3a, -2c).$$
Tangentplanet är parallellt med x-axeln om och endast om $2a+3b=0$. Tangentplanet innehåller $(17,0,2)$ om och endast om $(2a+3b, 2b+3a, -2c)\cdot\big((17,0,2)-(a,b,c)\big) = 0$. Vi får ekvationssystemet
$$\begin{cases} 2a+3b=0, \\ -(2b+3a)b - 2c(2-c) = 0, \\ a^2+b^2+3ab-c^2 = -2. \end{cases}$$
Andra plus 2 gånger sista ger $2a^2+3ab-4c=-4$. Detta och första ger $c=1$. Första i sista ger nu $-5b^2/4 = -1$. De sökta punkterna blir $(-3/\sqrt{5}, 2/\sqrt{5}, 1)$ och $(3/\sqrt{5}, -2/\sqrt{5}, 1)$.

6. Vi noterar att integranden är positiv, vilket motiverar nedanstående räkningar. De fyra linjerna $x=\pm 1$ och $y=\pm 1$ delar planet i nio områden. Stycka upp integralen som en summa av de nio integralerna över dessa områden.

I området $|x|<1$, $|y|<1$ är $d(x,y)=0$, och integralen blir $2\cdot 2\cdot e^0 = 4$.

I området $|y|<1, x>1$ är $d(x,y) = x-1$, och integralen blir $\displaystyle\int_1^\infty \left(\int_{-1}^1 dy\right) e^{1-x}dx = 2\int_0^\infty e^{-t}dt = 2.$

I området $x>1$, $y>1$ är $d(x,y) = \sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2}$, och med variabelbytet $x = 1+\rho\cos\varphi$, $y = 1+\rho\sin\varphi$ blir integralen
$$\iint_{x,y>1} e^{-\sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2}}dxdy = \int_0^\infty \left(\int_0^{\pi/2} d\varphi\right) e^{-\rho}\rho d\rho = \frac{\pi}{2}\int_0^\infty \rho e^{-\rho}d\rho = \pi/2.$$
Symmetri ger nu att den sökta integralen är $4 + 4\cdot 2 + 4\cdot\pi/2 = 12+2\pi$.