Svar till Linjär algebra med geometri, TATA67, 2018–04–03

1. Svar: $\frac{1}{5}\begin{pmatrix} -3 & -4 \\ 4 & -3 \end{pmatrix} \left(= \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & -3 \end{pmatrix} \right)$

2. Svar: $Q_{min} = -4$ och antas i punkterna $(x_1, x_2) = (\pm 3/\sqrt{13}, \mp 2/\sqrt{13})$

   Med basbytesmatrisen
   $$P = \frac{1}{\sqrt{13}}\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$$
   fås $Q = 9y_1^2 - 4y_2^2$ och minsta värdet antas för $(y_1, y_2) = (0, \pm 1)$. Återgå till de ursprungliga koordinaterna.

3. Svar: $x_1(t) = -2e^t + 3e^{3t}$ och $x_2(t) = 2e^t + 3e^{3t}$

   Efter diagonalisering med basbytesmatrisen
   $$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$
   fås systemet
   $$\begin{aligned} y_1'(t) &= y_1(t) \\ y_2'(t) &= 3y_2(t) \end{aligned}$$

4. Svar: $y = \frac{5}{4}x - \frac{1}{3}$

5. Svar: För $b = 5/3$ har ekvationssystemet minst en lösning för alla värden på a.

   För $a \neq 3$ är determinanten nollskild och då finns det alltid en entydig lösning enligt determinantkriteriet. När $a = 3$ finns en lösning om och endast om $b = 5/3$.

6. Genom att multiplicera uttrycken fås följande:
   $$\begin{aligned} (I - BA)(I + B(I - AB)^{-1}A) &= I - BA + B(I - AB)^{-1}A - BAB(I - AB)^{-1}A \\ &= I - BA + B(I - AB)(I - AB)^{-1}A = /(I - AB)(I - AB)^{-1} = I/ \\ &= I - BA + BIA = I - BA + BA = I \end{aligned}$$
   Detta visar att $I - BA$ inverterbar och att $(I - BA)^{-1} = I + B(I - AB)^{-1}A$