Svar till Linjär algebra med geometri, TATA67, 2018–01–10

1. Linjen ges av
$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad -\infty < t < +\infty$$

2. Svar: För $a = 1$ har ekvationssystemet mer än en lösning.

   Ekvationen $\det(A) = -2a^2 + 2a = 0$ har lösningarna $a = 1$ och $a = 0$. Fallet $a = 1$ ger parameterlösning och för fallet $a = 0$ saknas lösning. För övriga fall har ekvationssystemet entydig lösning enligt determinantkriteriet.

3. Svar: $x_1(t) = 2 + e^{5t}$ och $x_2(t) = -1 + 2e^{5t}$

   Efter diagonalisering med basbytesmatrisen
$$P = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$
   fås systemet
$$\begin{aligned} y_1'(t) &= 0 \\ y_2'(t) &= 5y_2(t) \end{aligned}$$

4. Svar: $X = \begin{pmatrix} 0 & 1/6 \\ 1/3 & 0 \end{pmatrix}$

5. Svar: $\frac{1}{6}\begin{pmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$

6. Enligt förutsättningar är $A\mathbf{v}_1 = \lambda_1\mathbf{v}_1$ och $A\mathbf{v}_2 = \lambda_2\mathbf{v}_2$ där $\lambda_1 \neq \lambda_2$. För att visa att $\mathbf{v}_1$ är $\mathbf{v}_1$ är linjärt oberoende visar vi nu att
$$c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 = 0 \tag{1}$$
   endast har den triviala lösningen $c_1 = c_2 = 0$. Genom att multiplicera sambandet med A från vänster fås sambandet
$$\begin{aligned} A(c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2) &= c_1A\mathbf{v}_1 + c_2A\mathbf{v}2 = /A\mathbf{v}_1 = \lambda_1\mathbf{v}_1, A\mathbf{v}_2 = \lambda_2\mathbf{v}_2/ \\ &= c_1\lambda_1\mathbf{v}_1 + c_2\lambda\mathbf{v}_2 = 0 \end{aligned} \tag{2}$$
   Genom att eliminera $\mathbf{v}_2$ från (1) och (2) får vi nu
$$c_1(\lambda_1 - \lambda_2)\mathbf{v}_1 = 0$$
   Enligt förutsättningarna är $\lambda_1 - \lambda_2 \neq 0$ och $\mathbf{v}_1 \neq 0$ enligt definitionen av egenvektor. Detta ger $c_1 = 0$. På samma sätt kan vi visa att $c_2 = 0$ vilket bevisar påståendet.