Linköpings universitet
Matematiska institutionen
Jan Åslund

Tentamen i Linjär algebra med geometri

TATA67/TEN1

2017–08–18 kl 14.00–19.00

Godkänd kontrollskrivning tillgodoräknas som 3 poäng på uppgift 1. Skriv G i den ruta på omslaget som hör till uppgift 1 om du har klarat kontrollskrivningen. Varje uppgift ger högst 3 poäng. För godkänt räcker 8 poäng och 3 godkända uppgifter. En uppgift är godkänd om den värderas till minst 2 poäng. Lösningarna ska vara fullständiga, välmotiverade och avslutade med ett svar. Inga hjälpmedel är tillåtna.

1. Bestäm avståndet mellan punkten $(2,1,1)$ och det plan som innehåller de tre punkterna $(1,0,1)$, $(2,-1,0)$ och $(1,2,2)$.

2. Bestäm den vektor X som minimerar $|AX-B|^2$ där
$$A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\\ 1 & 2\end{pmatrix},\quad X=\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}-2\\ 1\\ 3\end{pmatrix}$$

3. Antag att a_n och b_n ges av det rekursiva sambandet
$$\begin{aligned}a_{n+1}&=4a_n+9b_n\\ b_{n+1}&=a_n-4b_n\end{aligned}$$
för $n=0,1,2,3,\dots$, och att $a_0=b_0=1$. Bestäm ett uttryck för a_n som funktion av n.

4. Lös systemet av differentialekvationer
$$\begin{aligned}x_1'(t)&=4x_1(t)+x_2(t)\\ x_2'(t)&=-2x_1(t)+x_2(t)\end{aligned}$$
med begynnelsevärdena $x_1(0)=1$, $x_2(0)=0$.

5. Bestäm en symmetrisk postivt semidefinit matris sådan att alla vektorer i planet $x_1+2x_2+2x_3=0$ är egenvektorer med egenvärde 2.

6. Antag att vektorerna $\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2,\dots,\mathbf{x}_k$ i $\mathbf{R}^n$ är parvis ortogonala och normerade. Visa att de är linjärt oberoende.

Lycka till!