Svar till Linjär algebra med geometri, TATA67, 2017–04–18

1. Avbildningsmatrisen för den sammansatta avbildningen är

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix} \left(= \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}\right)$$

2. Svar: $x_1(t) = e^{8t}$ och $x_2(t) = -e^{8t}$

   Efter diagonalisering med basbytesmatrisen

$$P = \begin{pmatrix}1 & 5\\ -1 & 2\end{pmatrix}$$

   fås systemet

$$\begin{aligned} y_1'(t) &= 8y_1(t)\\ y_2'(t) &= y_2(t) \end{aligned}$$

3. Svar: $y = 1.2x + 1.6$

   Normalekvationerna är

$$\begin{aligned} 6a - 2b &= 4\\ -2a + 4b &= 4 \end{aligned}$$

4. Svar: Minsta värdet som antas på cirkeln är $Q_{min} = 9$ och detta värde antas i punkterna $(x_1, x_2) = (\pm 3\sqrt{6/7}, \mp 3/\sqrt{7})$

5. Svar: $b_{100} = 2^{-100}$

   Den allmänna lösningen är

$$\begin{pmatrix}a_n\\ b_n\end{pmatrix} = C_1 4^n \begin{pmatrix}-2\\ 1\end{pmatrix} + C_2(-1/2)^n \begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}$$

   Från förutsättningarna följer att $C_1 = 0$ och $C_2 = 1$.

6. Enligt förutsättningarna gäller att $A^t = A$, samt att $A\mathbf{u} = \lambda\mathbf{u}$ och $A\mathbf{v} = \mu\mathbf{v}$, där $\lambda \neq \mu$. Studerar nu uttrycket $\mathbf{v}^t A\mathbf{u}$. Från förutsättningarna följer att

$$\mathbf{v}^t A\mathbf{u} = /A\mathbf{u} = \lambda\mathbf{u}/ = \lambda\mathbf{v}^t\mathbf{u}$$

   men även att

$$\begin{aligned} \mathbf{v}^t A\mathbf{u} &= \big/\text{Räkneregeln } (AB)^t = B^t A^t\big/ = (A^t\mathbf{v})^t\mathbf{u}\\ &= \big/A^t = A\big/ = (A\mathbf{v})^t\mathbf{u} = /A\mathbf{v} = \mu\mathbf{v}/ = \mu\mathbf{v}^t\mathbf{u} \end{aligned}$$

   Sambanden ovan ger nu att $(\lambda - \mu)\mathbf{v}^t\mathbf{u} = 0$, vilket tillsammans med förutsättningen $\lambda \neq \mu$ ger att $\mathbf{v} \cdot \mathbf{u} = \mathbf{v}^t\mathbf{u} = 0$. Detta visar att $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ är ortogonala, vilket skulle visas.