Linköpings universitet
Matematiska institutionen
Jan Åslund

Tentamen i Linjär algebra med geometri
TATA67/TEN1

2017–04–18 kl 8.00–13.00

Godkänd kontrollskrivning tillgodoräknas som 3 poäng på uppgift 1. Skriv G i den ruta på omslaget som hör till uppgift 1 om du har klarat kontrollskrivningen. Varje uppgift ger högst 3 poäng. För godkänt räcker 8 poäng och 3 godkända uppgifter. En uppgift är godkänd om den värderas till minst 2 poäng. Lösningarna ska vara fullständiga, välmotiverade och avslutade med ett svar. Inga hjälpmedel är tillåtna.

1. Bestäm avbildningsmatrisen för den sammansatta avbildning i planet som först vrider vektorn vinkeln $\pi/4$ moturs och sedan speglar i linjen $x_1 = x_2$.

2. Lös systemet av differentialekvationer

$$\begin{aligned} x_1'(t) &= 3x_1(t) - 5x_2(t) \\ x_2'(t) &= -2x_1(t) + 6x_2(t) \end{aligned}$$

   med begynnelsevärdena $x_1(0) = 1$, $x_2(0) = -1$.

3. Anpassa, i minsta kvadrat-metodens mening, den räta linjen $y = ax + b$ till punkterna $(-2, -1)$, $(-1, 1)$, $(0, 1)$ och $(1, 3)$.

4. Bestäm det minsta värde som den kvadratiska formen

$$Q = 2{x_1}^2 + 2\sqrt{6}x_1x_2 + 7{x_2}^2$$

   antar på cirkeln $x_1^2 + x_2^2 = 9$. Ange även i vilka punkter Q antar sitt minsta värde.

5. Antag att a_n och b_n ges av det rekursiva sambandet

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= 2.5a_n - 3b_n \\ b_{n+1} &= -1.5a_n + b_n \end{aligned}$$

   för $n = 0, 1, 2, \ldots$, och att $b_0 = 1$ och $b_n \to 0$ då $n \to +\infty$. Bestäm b_{100}.

6. Antag att den symmetriska matrisen A har två egenvektorer, $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$, som hör till två olika egenvärden. Visa att då är $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ ortogonala.

Lycka till!