Svar till Linjär algebra med geometri, TATA67, 2017–01–10

1. Svar: Planets ekvation är $x + y + 2z = 5$.

   En normalvektor till det sökta planet fås genom att beräkna vektorprodukten av linjens riktningsvektor och normalvektorn till det givna planet.

2. Svar: $x_1(t) = e^{5t}/3 + 2e^{2t}/3$ och $x_2(t) = -2e^{5t}/3 - e^{2t}/3$

   Efter diagonalisering med basbytesmatrisen
   $$P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$
   fås systemet
   $$\begin{aligned} y_1'(t) &= 5y_1(t) \\ y_2'(t) &= 2y_2(t) \end{aligned}$$

3. Svar: Minsta kvadratlösning är $x_1 = -3/2$, $x_2 = 3/2$.

   Normalekvationerna är
   $$\begin{aligned} 3x_1 + 3x_2 &= 0 \\ 3x_1 + 5x_2 &= 3 \end{aligned}$$

4. Svar: $A^{100} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 4 \cdot 3^{100} + 2^{100} & 2 \cdot 3^{100} - 2 \cdot 2^{100} \\ 2 \cdot 3^{100} - 2 \cdot 2^{100} & 3^{100} + 4 \cdot 2^{100} \end{pmatrix}$

   Matrisen är diagonaliserbar: $A = PDP^{-1}$ där
   $$P = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \quad \text{och} \quad P^{-1} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

5. T.ex. ger variabelbytet $\mathbf{x} = P\mathbf{y}$, där P är ON-matrisen
   $$P = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -2 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix},$$
   den kvadratiska formen
   $$Q(y_1, y_2, y_3) = 9y_1^2 + 9y_2^2$$
   Anmärkning: Egenvärdena är 9 (dubbelrot) och 0. Egenvektorerna som hör ihop med egenvärdet 9 är alla vektorer som ligger i planet $2x - 2y + z = 0$. För att få en en ON-bas så måste två ortogonala vektorer väljas från detta plan och sedan normeras.

6. Från förutsättningen att $A^4 = 0$ följer att
   $$\begin{aligned} (I - A)(I + A + A^2 + A^3) &= I + A + A^2 + A^3 - A - A^2 - A^3 - A^4 \\ &= \big/ A^4 = 0 \big/ = I \end{aligned}$$
   Detta samband visar att $I - A$ är inverterbar och att $(I - A)^{-1} = I + A + A^2 + A^3$.