Svar till Linjär algebra med geometri, TATA67, 2016–08–19

1. Svar: Den sökta punkten är $(7/3, 2/3, 7/3)$

   Planets ekavation är $x - y + z = 2$ och en normalvektor till planet är t.ex. $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}^t$.

2. Svar: $x_1(t) = -3e^{-t}/5 + 3e^{4t}/5$ och $x_2(t) = 3e^{-t}/5 + 2e^{4t}/5$

   Efter diagonalisering med basbytesmatrisen
$$P = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$
   fås systemet
$$\begin{aligned} y_1'(t) &= -y_1(t) \\ y_2'(t) &= 4y_2(t) \end{aligned}$$

3. Svar: Det största värde som Q antar är $Q_{max} = 16$ och det antas i punkterna $(\pm 2/\sqrt{3}, \pm 2\sqrt{2/3})$.

   Diagonalisering med basbytesmatrisen
$$\frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & -1 \end{pmatrix}$$
   ger $Q = 4y_1^2 + y_2^2$.

4. Svar: $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 9 \\ -3 \end{pmatrix}$

   Normalekvationerna för det överbestämda ekvationssystemet är
$$\begin{aligned} 3x_1 + x_2 &= 6 \\ x_1 + 3x_2 &= 0 \end{aligned}$$

5. Svar: Den sökta avbildningsmatrisen är $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

   Från förutsättningarna följer att
$$A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad A \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$$
   vilket är tillräckligt för att bestämma A.

6. Från förutsättningen att A är symmetrisk följer att
$$\begin{aligned} (A^{-1})^t A &= \big/ (BC)^t = C^t B^t \big/ = (A^t A^{-1})^t \\ &= \big/ A \text{ är symmetrisk} : A^t = A \big/ = (AA^{-1})^t = I^t = I \end{aligned}$$
   Detta samband ger att $(A^{-1})^t = A^{-1}$ och alltså är även A^{-1} symmetrisk vilket visar påståendet.