Svar till Linjär algebra med geometri, TATA67, 2016–03–29

1. Svar: $7/\sqrt{3}$

   En normalvektor till planet är t.ex. $\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\end{pmatrix}^t$.

2. Svar: Punkterna $(\pm\sqrt{2/3}, \mp\sqrt{1/3})$ ligger närmaste origo.

   Diagonalisering med basbytesmatrisen

   $$\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & -1\end{pmatrix}$$

   ger ekvationen $y_1^2 + 4y_2^2 = 4$. Alltså är kurvan en ellips.

3. Svar: $A^k = \begin{pmatrix} 2\cdot 3^k - 2^k & -3^k + 2^k \\ 2\cdot 3^k - 2\cdot 2^k & -3^k + 2\cdot 2^k \end{pmatrix}$

   Den givna matrisen är diagonaliserbar och kan skrivas

   $$A = \begin{pmatrix}1 & 1 \\ 1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3 & 0 \\ 0 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & -1 \\ -1 & 1\end{pmatrix}$$

4. Svar: Minsta värdet är $\sqrt{238}/17$.

   Minsta värdet antas för $\mathbf{x} = \begin{pmatrix}14/17 \\ 2/17\end{pmatrix}^t$ som ges av normalekvationerna

   $$\begin{aligned} 7x_1 + 2x_2 &= 6 \\ 2x_1 + 3x_2 &= 2 \end{aligned}$$

5. Svar: $\frac{1}{\sqrt{8}}\begin{pmatrix}\sqrt{2}+1 & \sqrt{2}-1 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2}-1 & \sqrt{2}+1 & -\sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & \sqrt{2} & 2\end{pmatrix}$.

   I den högerorienterade ON-basen

   $$\begin{pmatrix}1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \\ 0\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \\ 0\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}0 \\ 0 \\ -1\end{pmatrix}$$

   ges avbilndningen av matrisen

   $$\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2}\end{pmatrix}$$

6. Antag att A har ett egenvärde λ och egenvektor $\mathbf{x} \neq 0$, d.v.s. $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$. Då är

   $$\begin{aligned} 0 = (A^2 - 4A + 6I)\mathbf{x} = A^2\mathbf{x} - 4A\mathbf{x} + 6\mathbf{x} = /A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}/ \\ = \lambda^2\mathbf{x} - 4\lambda\mathbf{x} + 6\mathbf{x} = (\lambda^2 - 4\lambda + 6)\mathbf{x} \end{aligned}$$

   Vilkoret $\mathbf{x} \neq 0$ ger nu att $0 = \lambda^2 - 4\lambda + 6 = (\lambda - 2)^2 + 2$' vilket ger en motsägelse. Alltså saknar A egenvärden och egenvektorer.