Svar till Linjär algebra med geometri, TATA67, 2016–01–12

1. Svar: $3x + 2y - 2z = 5$

   Det sökta planet är parallellt med vektorn $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}^t$ och vektorn som går mellan punkterna $(1, 0, -1)$ och $(1, 1, 0)$. En normalvektor till planet fås genom att ta vektorprodukten mellan de två vektorerna.

2. Svar: $x = -1/7, y = 3/7$

   Minsta kvadrat-lösningen ges av normalekvationerna:

$$\begin{aligned} 3x + y &= 0 \\ x + 5y &= 2 \end{aligned}$$

3. Svar: Ekvationssystemet har mer än en lösning för $a = -1$

   Koefficientmatrisens determinant är lika med noll för $a = -1$ och $a = 3$. Ekvationssystemet saknar lösning för $a = 3$ och har parameterlösing för $a = -1$. För övriga värden har ekvationssystemet entydig lösning enligt determinantkriteriet.

4. Svar: $x_1 = e^{-t}$ och $x_2 = -e^{-t}$

   Med basbytesmatrisen

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

   fås efter diagonalisering systemet

$$\begin{aligned} y_1'(t) &= -y_1(t) \\ y_2'(t) &= 6y_2(t) \end{aligned}$$

5. Svar: $x_1^2 - \frac{3}{2}x_1x_2 + x_2^2 = 1$

   Efter diagonalisering med basbytesmatrisen

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

   kan ekvationen för den sökta ellipsen skrivas på formen $\lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 = 1$ där λ_1 och λ_2 är okända. Koordinaterna för de givna punkterna i den nya basen är $(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$ och $(2, 0)$, vilket ger $\lambda_1 = 1/4$ och $\lambda_2 = 7/4$. Ekvationen fås nu genom att gå tillbaka till de gamla koordinaterna.

6. Från det givna sambandet följer att

$$\begin{aligned} 0 &= \det(A^2 - 5A + 6I) = \det\left((A - 3I)(A - 2I)\right) \\ &= /\text{Multiplikationssatsen}/ = \det(A - 3I)\det(A - 2I) \end{aligned}$$

   Detta medför att $\det(A - 2I) = 0$ eller $\det(A - 3I) = 0$ och alltså måste $\lambda = 2$ eller $\lambda = 3$ vara en lösning till ekvationen $\det(A - \lambda I) = 0$. Detta medför att det finns det minst ett egenvärde och motsvarande egenvektorer ges av $(A - \lambda)\mathbf{x} = 0$.