Svar till Linjär algebra med geometri, TATA67, 2015–08–21

1. Svar: Avståndet är $\sqrt{3/2}$

   Linjen är parallell med planet och därför kan man ta en godtycklig punkt på linjen, t.ex. $(1, 0, -1)$, och sedan räkna ut avståndet mellan punkten och planet.

2. Svar: De punkter som ligger närmast origo är $(\pm\sqrt{2}/(2\sqrt{5}), \pm\sqrt{3}/(2\sqrt{5}))$

   Genom diagonalisering med basbytesmatrisen

   $$\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}\sqrt{2} & -\sqrt{3}\\ \sqrt{3} & \sqrt{2}\end{pmatrix}$$

   fås $4y_1^2 - y_2^2 = 1$ vilket kan skrivas om som

   $$\left(\frac{y_1}{1/2}\right)^2 - \left(\frac{y_2}{1}\right)^2 = 1$$

   Alltså en hyperbel och punkterna som ligger närmast origo är $(y_1, y_2) = (\pm 1/2, 0)$, vilket ger punkterna $(\pm\sqrt{2}/(2\sqrt{5}), \pm\sqrt{3}/(2\sqrt{5}))$ i de ursprungliga koordinaterna.

3. Svar: Ekvationssystemet har aldrig mer än en lösning.

   Koefficientmatrisens determinant är lika med noll för $a = -4$ och $a = 2$. För dessa två värden saknar ekvationssystemet lösning. För övriga värden har ekvationssystemet entydig lösning enligt determinantkriteriet.

4. Svar: $x_1 = -e^{-5t} + 3e^{3t}$ och $x_2 = -\frac{5}{2}e^{-5t} + \frac{3}{2}e^{3t}$

   Med basbytesmatrisen

   $$P = \begin{pmatrix}2 & 2\\ 5 & 1\end{pmatrix}$$

   fås efter diagonalisering systemet

   $$\begin{aligned} y_1'(t) &= -5y_1(t)\\ y_2'(t) &= 3y_2(t)\end{aligned}$$

5. Svar: Vektorerna är linjärt beroende för $a = 2$.

   Det homogena ekvationssystem, som definitionen av linjärt oberoende leder till, har icke-triviala lösningar för $a = 2$.

6. Förutsättningarna ger att vektorn $\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\end{pmatrix}^t$ är en egenvektor till A^t med egenvärde $\lambda = 1$. Sambandet $\det(A^t) = \det(A)$ ger att $\det(A^t - \lambda I) = \det(A - \lambda I)$, för alla värden på λ, och alltså har A och A^t samma egenvärden. Detta bevisar påståendet.