Linköpings universitet
Matematiska institutionen
Jan Åslund

Tentamen i Linjär algebra med geometri

TATA67/TEN1

2015–08–21 kl 14.00–19.00

Godkänd kontrollskrivning tillgodoräknas som 3 poäng på uppgift 1. Skriv G i den ruta på omslaget som hör till uppgift 1 om du har klarat kontrollskrivningen. Varje uppgift ger högst 3 poäng. För godkänt räcker 8 poäng och 3 godkända uppgifter. En uppgift är godkänd om den värderas till minst 2 poäng. Lösningarna ska vara fullständiga, välmotiverade och avslutade med ett svar. Inga hjälpmedel är tillåtna.

1. Bestäm avståndet mellan planet $x + y - 2z = 0$ och linjen

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

2. Rita en väsentligen riktig skiss av kurvan

$$x_1^2 + 2\sqrt{6}x_1x_2 + 2x_2^2 = 1$$

i x_1x_2-planet. Huvudaxlarnas riktningar skall framgå tydligt i figuren. Bestäm även de punkter på kurvan som ligger närmast origo.

3. För vilka värden på parametern a har ekvationssystemet

$$\begin{aligned} x + z &= 2 \\ 3x + ay - z &= 6 \\ ax + 2y - 2z &= a \end{aligned}$$

mer än en lösning?

4. Lös systemet av differentialekvationer

$$\begin{aligned} x_1'(t) &= 5x_1(t) - 4x_2(t) \\ x_2'(t) &= 5x_1(t) - 7x_2(t) \end{aligned}$$

med begynnelsevärdena $x_1(0) = 2$, $x_2(0) = -1$.

5. För vilka värden på parametern a är de tre vektorerna

$$\begin{pmatrix} 1 \\ a \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ och } \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -a \\ 3 \end{pmatrix}$$

är linjärt beroende

Vänd!

6. Antag att elementen i matrisen

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

uppfyller villkoren $a_{11} + a_{21} + a_{31} = a_{12} + a_{22} + a_{32} = a_{13} + a_{23} + a_{33} = 1$, d.v.s. att summan av elementen i varje kolonn är lika med ett. Visa att då är $\lambda = 1$ ett egenvärde till matrisen A.

Lycka till!