**Svar till Linjär algebra med geometri, TATA67, 2015–04–07**

1. Svar: Punkten $(0, 0, 5)$ är den punkt på $z$-axeln som ligger närmast den givna linjen.

   $z$-axeln kan skrivas på parameterform

   $$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

   På vanligt sätt kan man räkna ut att $s = 5$ och $t = -1$ ger minsta avståndet mellan de två linjerna där $s = 5$ ger den sökta punkten.

2. Svar: Minsta värdet är $-25$ och antas i punkterna $(x_1, x_2) = (\pm 3/5, \mp 4/5)$.

   Genom diagonalisering med basbytesmatrisen

   $$P = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$$

   fås i de nya koordinaterna

   $$Q = 25y_1^2 - 25y_2^2$$

   och bivillkoret kan skrivas $y_1^2 + y_2^2 = 1$. Minsta värdet antas för $(y_1, y_2) = (0, \pm 1)$ ock genom att använda basbytesmatrisen fås motsvarande $(x_1, x_2)$-koordinater.

3. Svar: $y = 6x/5 + 7/5$

   Konstanterna $a$ och $b$ fås genom att lösa normalekvationerna:

   $$\begin{aligned} 6a + 2b &= 10 \\ 2a + 4b &= 8 \end{aligned}$$

4. Svar: $a_{100} = 3 - 2^{101}$

   Den allmänna lösingen är

   $$\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = C_1 2^n \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + C_2 1^n \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

   för $n = 0, 1, \ldots$, där $C_1$ och $C_2$ är konstanter. Genom att sätta $a_0 = -a_1 = 1$ fås värdena på konstanterna $C_1 = -2$ och $C_2 = 3$.

5. Svar: $\begin{pmatrix} 3 & -4 & 4 \\ -3 & 5 & -5 \\ -3 & 6 & -5 \end{pmatrix}$

   Om $\mathbf{e}$ betecknar standardbasen och $\mathbf{f}$ betecknar nya basen så kan bassambandet skrivas $\mathbf{f} = \mathbf{e}P$ där $P^{-1}$ kan läsas ut från de givna koordinatsambandet:

   $$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

   Nu kan formeln för basbyten och avbildningsmatriser användas.

6. Antag att

$$x_1\mathbf{v}_1 + x_2\mathbf{v}_2 + x_3\mathbf{v}_3 = \mathbf{0}$$

Genom att multiplicera uttrycket med matrisen $A$ fås sambandet

$$A(x_1\mathbf{v}_1 + x_2\mathbf{v}_2 + x_3\mathbf{v}_3) = \lambda_1 x_1\mathbf{v}_1 + \lambda_2 x_2\mathbf{v}_2 + \lambda_3 x_3\mathbf{v}_3 = \mathbf{0}$$

och genom att multiplicera med $A$ en gång till fås följande samband:

$$A(\lambda_1 x_1\mathbf{v}_1 + \lambda_2 x_2\mathbf{v}_2 + \lambda_3 x_3\mathbf{v}_3 3) = \lambda_1^2 x_1\mathbf{v}_1 + \lambda_2^2 x_2\mathbf{v}_2 + \lambda_3^2 x_3\mathbf{v}_3\mathbf{0}$$

Genom att sätta in $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -1$ och $\lambda_1 = 0$ och utföra radoperationer på de tre sambanden ovan kan man komma fram till att $x_1\mathbf{v}_1 = x_2\mathbf{v}_2 = x_3\mathbf{v}_3 = \mathbf{0}$. Nu medför $\mathbf{v}_i \neq \mathbf{0}$, för $i = 1, 2, 3$, att $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ och alltså är vektorerna $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ och $\mathbf{v}_3$ linjärt oberoende.