

Tentamen i Linjär algebra med geometri TATA67/TEN1

2015-04-07 kl 8.00-13.00

Godkänd kontrollskrivning tillgodoräknas som 3 poäng på uppgift 1. Skriv G i den ruta på omslaget som hör till uppgift 1 om du har klarat kontrollskrivningen. Varje uppgift ger högst 3 poäng. För godkänt räcker 8 poäng och 3 godkända uppgifter. En uppgift är godkänd om den värderas till minst 2 poäng. Lösningarna ska vara fullständiga, välmotiverade och avslutade med ett svar. Inga hjälpmedel är tillåtna.

1. Bestäm den punkt på z -axeln som ligger närmast linjen

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$$

2. Bestäm det minsta värde som den kvadratiske formen

$$Q = 7x_1^2 + 48x_1x_2 - 7x_2^2$$

antar på cirkeln $x_1^2 + x_2^2 = 1$. Ange även i vilka punkter Q antar sitt minsta värde.

3. Anpassa i minsta kvadrat-metodens mening den räta linjen $y = ax + b$ till punkterna $(-1, 0)$, $(0, 2)$, $(1, 2)$ och $(2, 4)$.
4. Antag att a_n och b_n ges av det rekursiva sambandet

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= 3a_n + b_n \\ b_{n+1} &= -2a_n \end{aligned}$$

för $n = 0, 1, 2, \dots$, samt att $a_0 = -a_1 = 1$. Bestäm a_{100} .

5. En linjär avbildning har i standardbasen matrisen

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Antag att en ny bas införs där sambandet mellan koordinaterna $(x' \ y' \ z')^t$ i den nya basen och koordinaterna $(x \ y \ z)^t$ i standardbasen ges av

$$\begin{aligned} x' &= x - 2y - 2z \\ y' &= y + 2z \\ z' &= -x + 2y + 3z \end{aligned}$$

Bestäm avbildningsmatrisen i den nya basen.

Vänd!

6. Antag att \mathbf{v}_1 , \mathbf{v}_2 och \mathbf{v}_3 är egenvektorer till den kvadratiske matrisen A och att motsvarande egenvärden är 1 , -1 och 0 . Utgå från definitionen av linjärt oberoende för att visa att \mathbf{v}_1 , \mathbf{v}_2 och \mathbf{v}_3 är linjärt oberoende.

Lycka till!