Svar till Linjär algebra med geometri, TATA67, 2015–01–13

1. Svar: Avståndet är $\sqrt{6}$.

   Skärningslinjen ges av
$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

2. Ekvationssystemet saknar lösning för $a = -2$.

   Determinanten av koefficientmatrisen är noll för $a = 1$ och $a = -2$. För $a = 1$ fås parameterlösning och för $a = -2$ saknas lösning. För övriga värden har ekvationssystemet entydig lösning.

3. Svar: $x_1 = e^{7t}/2 - 3e^{3t}/2$ och $x_1 = e^{7t}/2 + e^{3t}/2$.

   Genom diagonalisering med basbytesmatrisen
$$P = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$
   fås systemet
$$\begin{aligned} y_1'(t) &= 3y_1(t) \\ y_2'(t) &= 7y_2(t) \end{aligned}$$

4. Svar: Planets ekvation är $x + 2y - z = 0$.

   Speglingsplanet fås genom att bestämma de egenvektorer som har egenvärde 1.

5. Svar: Egenvärdena är $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = 2$ och motsvarande egenvektorer är $\mathbf{v}_1 = t\begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix}^t$, $\mathbf{v}_2 = s\begin{pmatrix} 1 & -2 \end{pmatrix}^t$, där $s, t \neq 0$

   Från förutsättningarna kan avbildningens matris bestämmas
$$\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$
   Sedan kan matrisens egenvärden och egenvektorer beräknas. Går även se direkt att de givna vektorerna är egenvektorer och använda definitionen.

6. För samtliga värden på parametern λ gäller att
$$\begin{aligned} \det(A_f - \lambda I) &= /A_f = P^{-1}A_eP, I = P^{-1}P/ = \det(P^{-1}A_eP - \lambda P^{-1}P) \\ &= \det(P^{-1}(A_e - \lambda I)P) \\ &= /\text{Multiplikationssatsen} : \det(AB) = (\det A)(\det B)/ \\ &= (\det P^{-1})(\det(A_e - \lambda I)(\det P) \\ &= (\det P^{-1})(\det P)\det(A_e - \lambda I) \\ &= /\text{Multiplikationssatsen}/ \\ &= \det(P^{-1}P)\det(A_e - \lambda I) = (\det I)\det(A_e - \lambda I) \\ &= /\det I = 1/ = \det(A_e - \lambda I) \end{aligned}$$
   Detta visar påståendet.