Linköpings universitet
Matematiska institutionen
Jan Åslund

Tentamen i Linjär algebra med geometri

TATA67/TEN1

2015–01–13 kl 8.00–13.00

Godkänd kontrollskrivning tillgodoräknas som 3 poäng på uppgift 1. Skriv G i den ruta på omslaget som hör till uppgift 1 om du har klarat kontrollskrivningen. Varje uppgift ger högst 3 poäng. För godkänt räcker 8 poäng och 3 godkända uppgifter. En uppgift är godkänd om den värderas till minst 2 poäng. Lösningarna ska vara fullständiga, välmotiverade och avslutade med ett svar. Inga hjälpmedel är tillåtna.

1. Bestäm minsta avståndet mellan punkten $(3, 3, 1)$ och skärningslinjen mellan de två planen $x + y - 2z = 1$ och $x - 2y + z = 4$.

2. För vilka värden på parametern a saknar ekvationssystemet

$$\begin{aligned} ax - y + 2z &= 3 \\ y - z &= -2a \\ 2x + y + az &= 0 \end{aligned}$$

   lösning?

3. Lös systemet av differentialekvationer

$$\begin{aligned} x_1'(t) &= 4x_1(t) + 3x_2(t) \\ x_2'(t) &= x_1(t) + 6x_2(t) \end{aligned}$$

   med begynnelsevärdena $x_1(0) = -1$, $x_2(0) = 1$.

4. Matrisen

$$\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ -2 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

   representerar en spegling i ett plan genom origo. Bestäm planets ekvation på parameterfri form.

5. Betraktar en linjär avbilding från $\mathbf{R}^2$ till $\mathbf{R}^2$. Antag att vektorn $\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2$ avbildas på vektorn $3\mathbf{e}_1 - 3\mathbf{e}_2$ och att vektorn $-\mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2$ avbildas på vektorn $-2\mathbf{e}_1 + 4\mathbf{e}_2$. Bestäm avbildningens samtliga egenvektorer och egenvärden.

Vänd!

6. Antag att de två kvadratiska matriserna A_e och A_f representerar samma linjära avbildning i de två baserna $\mathbf{e} = (\mathbf{e}_1\, \mathbf{e}_2 \ldots \mathbf{e}_n)$ och $\mathbf{f} = (\mathbf{f}_1\, \mathbf{f}_2 \ldots \mathbf{f}_n)$, där bassambandet kan skrivas $\mathbf{f} = \mathbf{e}P$. Visa att då är

$$\det(A_f - \lambda I) = \det(A_e - \lambda I)$$

för alla värden på den reella parametern λ. Ledning: Om A och B är två kvadratiska matriser av samma ordning så gäller att $\det(AB) = (\det A)(\det B)$ och om C är en inverterbar matris så är $C^{-1}C = CC^{-1} = I$.

Lycka till!