Svar till Linjär algebra med geometri, TATA67, 2014–08–22

1. Svar: $x = 1 + t$, $y = 2$ och $z = -2 - t$

   Det givna linjen skär planet i punkten $(1, 2, -2)$. Riktningsvektorn för den sökta linjen ska vara vinkelrät mot en normalvektor till planet, t.ex. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^t$ och en riktningsvektor för den givna linjen, t.ex. $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}^t$. En vektor som uppfyller båda villkoren är $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}^t$.

2. Svar: $x = -6/35$ och $y = 1/35$

   Normalekvationerna

   $$\begin{aligned} 6x + y &= -1 \\ x + 6y &= 0 \end{aligned}$$

   ger minsta kvadrat-lösningen.

3. Svar: $x_1(t) = \frac{3}{2}e^{7t} - \frac{1}{2}e^{3t}$ och $x_2(t) = \frac{1}{2}e^{7t} + \frac{1}{2}e^{3t}$

   Genom diagonalisering med basbytesmatrisen

   $$P = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

   fås systemet

   $$\begin{aligned} y_1'(t) &= 7y_1(t) \\ y_2'(t) &= 3y_2(t) \end{aligned}$$

4. Svar: Ekvationssystemet saknar lösning för $a = -2$.

   Systemets koefficientmatris är nollskild för $a \neq \pm 2$, vilket medför att ekvationssystemet har entydig lösning i dessa fall, enligt determinantkriteriet. För $a = 2$ fås parameterlösning och för $a = -2$ saknas lösning.

5. Minsta värdet som Q antar är $-1/2$ och antas i punkterna $(0, \pm 1/2, 0)$.

   Genom diagonalisering med basbytesmatrisen

   $$\frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ \sqrt{5} & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

   fås den kvadratiska formen $Q(u, v, w) = -2u^2 - v^2 + 4w^2$ och bivillkoret kan skrivas $u^2 + v^2 + w^2 = 1/4$. Minsta värdet är $Q_{min} = -1/2$ antas i punkterna $(u, v, w) = (\pm 1/2, 0, 0)$ genom att återgå till de ursprungliga koordinaterna fås punkterna $(0, \pm 1/2, 0)$.

6. Svar: $\lim_{k\to\infty} b_k = 2/3$

Sambanden kan skrivas som ett rekursivt samband $\mathbf{x}_{k+1} = A\mathbf{x}_k$ där

$$A = \begin{pmatrix} 0.8 & 0.3 \\ 0.2 & 0.7 \end{pmatrix}, \text{ och } \mathbf{x}_k = \begin{pmatrix} a_k \\ b_k \end{pmatrix}$$

Matrisen A har egenvärdena $\lambda_1 = 1$ och $\lambda_2 = 0.5$ med motsvarande egenvektorer $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 3 & 2 \end{pmatrix}^t$ och $\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix}^t$. En godtycklig vektor $\mathbf{x}_0$ kan skrivas på formen $\mathbf{x}_0 = s\mathbf{v}_1 + t\mathbf{v}_2$. Detta medför att $\lim_{k\to\infty} a_k = 3s$ och $\lim_{k\to\infty} b_k = 2s$, se t.ex. Exempel 7.18 och Övning 7.19 i kursboken för detaljer. Förutsättningarna ger nu att $s = 1/3$.